# CINEMATICA

CAPITULO
1

## CINEMATICA

Llamamos cinemática a la parte de la Física que estudia el movimiento de los cuerpos, sin considerar las causas que lo producen o lo modifican.

### MOVIMIENTO

Se dice que un cuerpo está en movimiento cuando cambia continuamente su posición respecto a otro que se considera fijo y se toma como referencia. Describir el movimiento de un móvil significa conocer su posición para cada valor del tiempo, es decir, encontrar una función **$x = f(t)$**, que nos permite conocer **x**, cuando damos valores a **t**.

El movimiento de un cuerpo puede hacerse sobre una recta, un plano o en el espacio. En el primer caso representamos el desplazamiento del móvil por medio de una línea coincidente con la dirección del movimiento (figura 1).

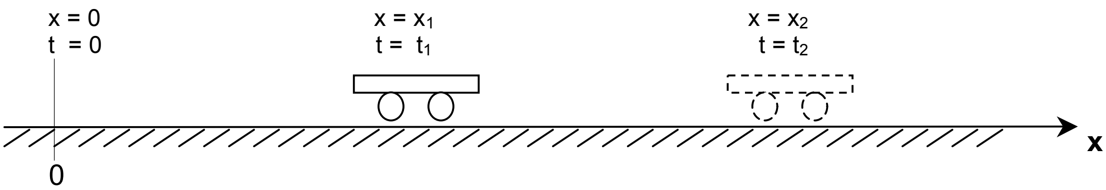


Figura 1

Si fijamos un origen de referencias, podemos especificar la posición del móvil con la coordenada x, medida a partir del origen. Así, por ejemplo, en el instante $t = 0$, el móvil está en el origen; para $t = t_1$, está a una distancia $x = x_1$ del origen, etc.

En el caso del movimiento en un plano, representamos el movimiento sobre un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales (figura 2). En este caso, en el tiempo $t = t_1$, la posición del móvil queda determinada no sólo dando la abcisa $x = x_1$, sino también la ordenada $y = y_1$. Un ejemplo de este tipo de movimiento es el de la trayectoria que sigue una pelota formando un ángulo con la horizontal.

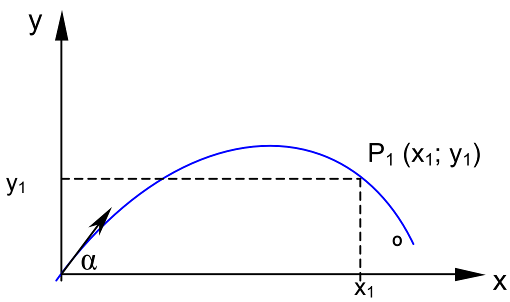


Figura 2

También con la figura que sigue, trataremos de aclarar mejor la idea de movimiento respecto de dos ejes.

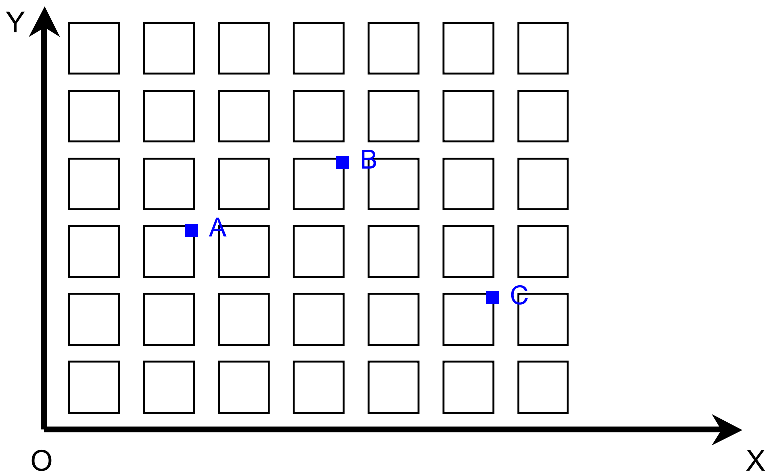

Figura 3

Supongamos que los ejes OX y OY, perpendiculares, representen dos avenidas fundamentales en el trazado de esta ciudad, Corrientes, y que un móvil, situado primitivamente en A, éste, después de cierto tiempo, en B, y posteriormente en C.

La posición en A es a 3 cuadras de X y a 2 cuadras de Y; en B, a 4 cuadras de X y a 4 cuadras de Y; en C, a 2 cuadras de X y a 6 cuadras de Y.

Es decir que las posiciones del móvil respecto de las avenidas han cambiado con respecto al tiempo transcurrido. Matemáticamente hablando, los ejes OX y OY representan un sistema de ejes cartesianos.

Entonces, *un punto o un cuerpo está en movimiento, respecto de un sistema de coordenadas considerado fijo, cuando las coordenadas de ese punto varían con respecto al tiempo transcurrido.*

Ejemplo.

Hallándonos sentados en un automóvil ¿estamos en movimiento o en reposo?. Diremos ambas cosas: en movimiento con respecto al paisaje; en reposo con respecto a los puntos del vehículo.

Igualmente, sentados en un aula del Instituto de Criminalística, leyendo, estaremos:

a) En reposo respecto de un punto del aula;
b) En movimiento respecto de un punto del cielo (sol, estrella), ya que giramos con la Tierra.

Con lo cual queda aclarado que el fenómeno dependerá del sistema de coordenadas elegido.

En la figura 4, se representa un movimiento cualquiera en el espacio. Para determinar la posición del móvil en el tiempo $t = t_1$, es preciso dar las tres coordenadas: $x = x_1$; $y = y_1$; $z = z_1$.

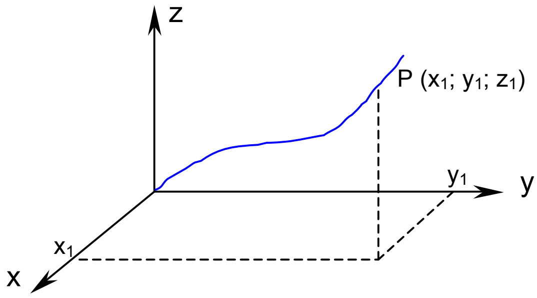


Fig. 4

MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN

El cuerpo posee movimiento de traslación cuando un determinado segmento de él adopta posiciones paralelas a la primitiva.

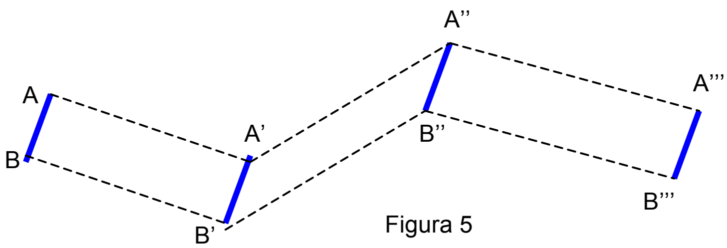


Figura 5

MOVIMIENTO DE ROTACIÓN

Un cuerpo realiza movimiento de rotación cuando uno de sus puntos describe una circunferencia o arcos de circunferencia.

La Tierra por ejemplo, posee dos movimientos: de traslación, alrededor del Sol, y de rotación, sobre su eje.

MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORME

Es aquel movimiento en el cual el móvil describe una trayectoria rectilínea y recorre espacios iguales en tiempos iguales.

En un movimiento uniforme, la definición de la velocidad es la siguiente:

*Velocidad es el espacio o distancia recorrida en cada unidad de tiempo; o dicho de otra manera, es el cociente entre el espacio recorrido y el tiempo empleado para hacerlo.*

En símbolos,

$$V = \frac{x}{t}$$

donde

$v$ = velocidad (unidades: km/h, m/s, milla/h);
$x$ = distancia (unidades: m, km, yarda, milla);
$t$ = tiempo (unidades: seg., min., hora)

de esta fórmula, despejando, resulta

$$X = v.\,t$$

y

$$t = \frac{x}{v}$$

La figura 6 es una gráfica de la velocidad (constante) en función del tiempo para el movimiento rectilíneo uniforme (MRU). El móvil tiene una velocidad de 20 m/s para cualquier valor del tiempo.

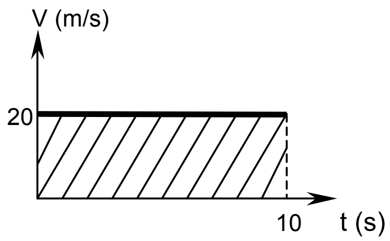


Fig. 6

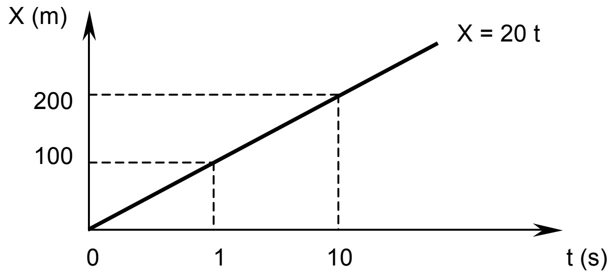


Fig. 7

Si quisiéramos conocer el camino recorrido en 10 s, aplicamos la ecuación $x = v \,.\, t = 20$ m/s – 10 s = 200 m. Gráficamente, esto equivale a evaluar el área rayada en la fig. 6.

La fig. 7 es una gráfica de la posición del mismo móvil como una función del tiempo: se observa que la ecuación de este movimiento es $x = 20\,t$, donde $x$ está medido en metros y $t$ en segundos. La pendiente de la recta indica la velocidad del móvil.

Por último, se observa que la velocidad es una magnitud vectorial, ya que para determinarla debemos fijar no sólo el módulo y la dimensión, sino también dirección y sentido.

## MOVIMIENTO VARIADO. ACELERACIÓN

*Movimiento variado es el que posee el móvil cuya velocidad es distinta en cada unidad de tiempo.*

Supongamos que al final de la primera hora posee una velocidad de 30 km/h; al final de la segunda, 45 km/h; al final de la tercera, 70 km/h (figura 8).

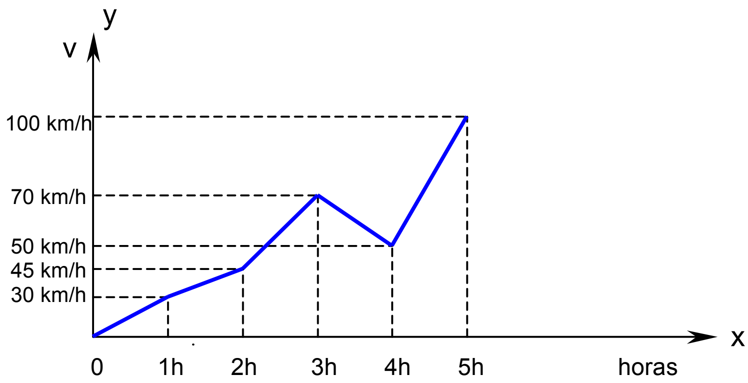


Fig. 8

Verificamos que para cada unidad de tiempo se producen variaciones de velocidad, lo cual permite definir una nueva magnitud, LA ACELERACIÓN, que la definimos como el cociente entre la variación de velocidad e intervalo de tiempo transcurrido.

En símbolos,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

donde,

$a$ = aceleración
$\Delta v$ = incremento de velocidad;
$\Delta t$ = intervalo de tiempo.

La variación de la velocidad $\Delta v$, siempre la diferencia entre la segunda y la primera velocidad considerada.

La aceleración se mide en m/seg$^2$, si al cambio de velocidades lo medimos en m/seg y al tiempo en seg (sistema MKS). Por ejemplo, si un móvil tiene una aceleración de 10 m/seg$^2$, queremos indicar que en cada segundo su velocidad se incrementa en 10 m/seg.

La aceleración también es una magnitud vectorial, pues debemos indicar su dirección y sentido.

## MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE VARIADO

Si un móvil varía su velocidad en forma uniforme con el tiempo, es decir, si en iguales intervalos de tiempo su velocidad se incrementa en la misma cantidad, el móvil tiene una aceleración constante. Tal movimiento se dice que es uniformemente variado. Deduciremos algunas ecuaciones que describen este movimiento, ya que resultarán útiles en problemas posteriores.

De la ecuación que dice:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} \qquad (1)$$

tomando $t_i = 0$, se obtiene:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t} \quad (2) \qquad □ \qquad v_f = v_i + a.\, t \quad (3)$$

Que nos describe la variación de la velocidad con el tiempo. Se observa que la $v_i$ (velocidad inicial) y "a" (aceleración) son constantes que dependen del movimiento particular de que se trate. La ecuación (3) no da la velocidad del móvil para cada instante t. La figura 9 es una gráfica en que se representa la velocidad en función del tiempo en MUV.

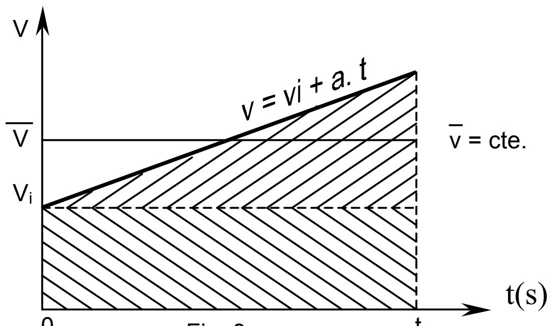

Fig. 9

En ésta observamos que la velocidad aumenta uniformemente desde el valor inicial **vi** (para **t = 0**) hasta el valor **v = vi + a. t** (para un tiempo **t** cualquiera). La velocidad media $\overline{\mathbf{v}}$ en este intervalo es:

$$\overline{v} = \frac{v_i + v}{2} = \frac{v_i + v_i + a\,.\,t}{2} \qquad □ \qquad \overline{v} = v_i + \frac{1}{2}\,.\,a\,.\,t \qquad (4)$$

Para un tiempo t dado, el desplazamiento del móvil con aceleración constante puede identificarse con el que tendría un móvil con velocidad constante $\overline{\mathbf{v}}$ en este mismo tiempo, es decir:

$$X = \overline{v}\,.\,t \quad (5) \qquad \text{o bien} \qquad x = \frac{v_i + v}{2}\,.\,t \quad (6)$$

reemplazando en (5) el valor de $\overline{v}$ dado por (4) queda:

$$X = \left(v_i + \frac{1}{2}\,.\,a.\,t\right).\,t \qquad □ \qquad X = v_i\,.t + \frac{1}{2}\,.\,a\,.\,t^2 \qquad (7)$$

También en este caso el desplazamiento está representado por el área encerrada por la gráfica y los ejes coordenados; el área total está dada por la suma del área del rectángulo (**vi. t**) y la del triángulo (**1/2. a. $t^2$**).

En la ecuación (6) las variables son **x**, **v**, **t**. La velocidad **vi** es una constante que depende de las condiciones iniciales del movimiento.

La ecuación (3) nos proporciona una relación entre las variables **v, a** y **t,** pero en ella no figura el desplazamiento **x**. En la ecuación (7) aparecen **x**, **a** y **t** pero no **v**. Resulta conveniente deducir una ecuación que reúna las variables **v**, **a** y **x** pero no haga aparecer explícitamente el tiempo. A tal fin, de las ecuaciones (3) y (6):

$V = v_i + a.\,t$ (3) ; $X = \dfrac{v_i + v}{2}\,.\,t$ (6); eliminamos el tiempo **t**.

Despejando el tiempo de (3) queda: $t = \dfrac{v - v_i}{a}$. Llevando este valor a (6) se obtiene:

$X = \dfrac{v_i + v}{2}\,.\,\dfrac{v - vi}{a}$ □ $v^2 - v_i^2 = 2.\,a.\,x$ □ $v^2 = v_i^2 + 2.\,a.\,x$ (8)

Usando las ecuaciones (3), (6), ( 7) y (8) puede resolverse cualquier problema particular de MUV.

## CAIDA LIBRE Y TIRO VERTICAL

Como aplicación del MUV, se tratará el movimientos de cuerpos que se dejan caer libremente y son atraídos por la Tierra (caída libre), y de cuerpos que son arrojados verticalmente con una velocidad inicial (caída libre).

Experimentalmente se demostró que todos los cuerpos, en un mismo lugar de la Tierra, y prescindiendo del rozamiento del aire (vacío), caen con la misma aceleración.

Esta aceleración de caída, común a todos los cuerpos, se llama aceleración de la gravedad, y se representa con la letra “g”, siendo su valor de aproximadamente 9,8 m/seg$^2$.

El valor de “g” cambia algo con la latitud, alcanzando su valor mínimo en el Ecuador, 9,78 m/seg$^2$; y va aumentando hacia los Polos donde alcanza su valor máximo, 9,83 m/seg$^2$. Para los cálculos se toma generalmente el valor de 9,806, correspondiente a 45º de latitud y al nivel del mar.

A medida que ascendemos, la fuerza de la gravedad es menor, o sea que la aceleración de la gravedad disminuye con la altura.

Sin embargo, dentro de los cálculos y problemas que realizamos, este fenómeno es despreciable. A 30.000 mts. de altura la disminución de “g” es apenas del 1%.

Como la “caída libre” y el “tiro vertical”, son casos especiales de Movimiento Uniformemente Variado, se cumplen las mismas leyes que en ese movimiento; y por lo tanto resultarán válidas las ecuaciones (3), (6), (7) y ( 8), en la cuales se cambia el símbolo “a”, que representa una aceleración cualquiera, por el símbolo “g”, que representa el valor de la aceleración de la gravedad terrestre (9,8 m/seg$^2$). Además el símbolo “x”, que representa un camino arbitrario, se lo reemplaza por “y”, que representará la altura o desplazamientos verticales. Con esta nueva notación, las fórmulas para la caída libre son:

$V = g.\,t$ (3’) suponiendo que la $V_i = 0$

$Y = \dfrac{v}{2}\,.\,t$ (6’) “ “

$Y = \dfrac{1}{2}\,.\,g\,.\,t^2$ (7’) “ “

$V^2 = 2\,.\,g\,.y$ (8’) “ “

Y para el tiro vertical:

$$V = v_i - g \cdot t$$

$$Y = \frac{v + v_i}{2} \cdot t$$

$$Y = v_i \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$v^2 = v_i^2 - 2 \cdot g \cdot y$$

El signo menos proviene de que "g" es negativo, es decir la partícula tiene sentido contrario al del desplazamiento.

MOVIMIENTO EN UN PLANO O TIRO HORIZONTAL

Este caso, no se trata de un movimiento rectilíneo como los considerados anteriormente, sino de un movimiento cuya trayectoria es curva, pero siempre dentro de un mismo plano. Por ejemplo, el caso de un chorro de agua que sale a presión desde una manguera puesta en cualquier posición o el de una bomba vista desde la tierra arrojada por un avión.

Para describir esta clase de movimiento, resulta útil considerarlo como una superposición de dos movimientos, uno sobre el eje "x" y el otro sobre el eje "y". Cada movimiento actúa con independencia del otro y la trayectoria real es la suma (en el plano) de ambos movimientos.

Para aclarar este punto, se resolverá un problema particular, que consiste en estudiar el movimiento de una pelota arrojada desde una cornisa de altura $\mathbf{y_1}$, con una velocidad horizontal $\mathbf{v_1}$. (figura 10).

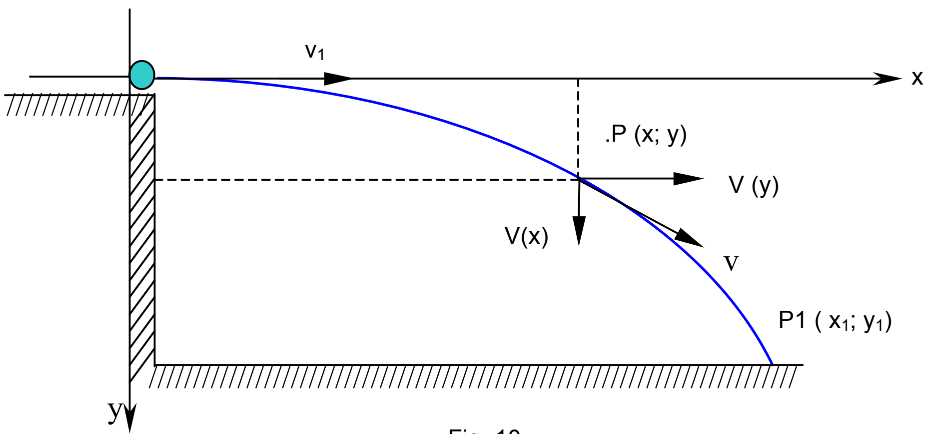


Fig. 10

Se fija un sistema de coordenadas en el punto en que es arrojada la pelota. De acuerdo al procedimiento general, el movimiento puede descomponerse en dos, uno en la dirección del eje "x" y otro en la dirección del eje "y". El desplazamiento sobre "y" es uniformemente acelerado (caída libre), con velocidad inicial nula, ya que la componente del vector velocidad inicial sobre el eje "y" valer cero.

Por lo tanto:

$$Y = \frac{1}{2} . g. t^2 \qquad (9)$$

El desplazamiento sobre el eje “x” es uniforme (ya que no hay aceleraciones en la dirección “x”) con velocidad constante “v1”, cumpliéndose la ecuación.

$$X = v_1 . t \qquad (10)$$

Las ecuaciones (9) y (10) nos permiten, para un tiempo “t” dado, conocer la abcisa y la ordenada para cualquier punto de la trayectoria. Si despejamos “t” de la ecuación (10) y reemplazamos en la (9) queda:

$$Y = \frac{g}{2. v_1^2} . x^2 \qquad (11)$$

que es la ecuación de la trayectoria de la pelota. Se observa que resulta una parábola centrada en el origen, por lo que este tipo de movimiento suele llamarse “parabólico”.

El alcance del tiro (x1 en la fig. 8), puede determinarse si se conoce la altura de la cornisa “y1”. En efecto, la ecuación (11) también debe cumplirse para el punto P1 (x1; y1), ya que él pertenece a la curva. Reemplazando en (11) queda:

$$Y_1 = \frac{g}{2. v_1^2} . x_1^2 \qquad \square \qquad x_1 = v_1 . \sqrt{\frac{2. y_1}{g}}$$

Para calcular el módulo y dirección del vector velocidad en un punto “P” cualquiera de la trayectoria, se tiene que:

Conocida la velocidad inicial $v_1$; la:

$V_X = V_1 = cte.$

$V_Y = V_1 . \cos . \square$

$V_R = \sqrt{v_X^2 + v_Y^2}$

$tg\ \square = \frac{v_Y}{v_X} \qquad \square \qquad \square = arc.\ tg. \frac{V_Y}{v_X}$

Para conocer el tiempo de descenso de la pelota, basta con despejarlo de la ecuación (10), o bien para cualquier punto de la trayectoria, de la ecuación (11).

## CINEMATICA DE LA ROTACIÓN

Otro movimiento muy importante que se verifica en un plano, es el que describe un punto material que se mueve con rapidez constante sobre una trayectoria circular (figura 11). Sea por ejemplo, el caso de una piedra unida a un hilo, que se hace girar con rapidez (módulo de la velocidad) constante, esto es que recorre arcos iguales en tiempos iguales.

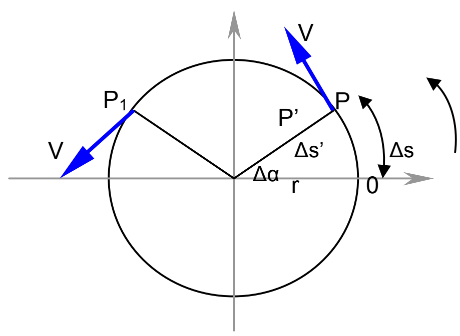


Fig. 12

Supongamos que el punto material de la figura, se mueve con velocidad constante partiendo del origen 0, en el tiempo "$t_0$", y que en el tiempo "t" ha recorrido una distancia Δs. El módulo de la velocidad de este punto es, de acuerdo con su definición:

$$V = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (12)$$

Si es "r" el radio de la trayectoria, pueden relacionarse Δs y Δα por medio de "r" en la forma siguiente:

$$\Delta s = r .\ \Delta\alpha \qquad (13)$$

Que llevada a (12) resulta:

$$V = r .\ \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \qquad (14)$$

El cociente Δα/Δt, se define como velocidad angular del punto material y se representa por la letra griega "ω". Es decir:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \qquad (15)$$

Esta velocidad angular tiene la importante propiedad de ser independiente del radio de la trayectoria. Esto es, todos los puntos del segmento que une el centro de giro con el punto material P, tal como el P', tienen la misma velocidad angular, puesto que ambos puntos, P y P', barren en el tiempo Δt, el mismo ángulo Δα. En el ejemplo dado, todos los puntos del hilo que mantiene ligada la piedra que gira, tienen la misma velocidad angular. La dimensión de ω es un ángulo dividido en un tiempo. Si el ángulo lo medimos en radianes y el tiempo en segundos, la velocidad angular viene medida en rad/seg. Se recuerda que un radián es “el ángulo cuyo arco es de igual longitud que el radio”, es decir, teniendo en cuenta la relación: $\alpha = s / r$, vemos que el radián es un número sin dimensión, ya que es el cociente de dos longitudes. Entonces la dimensión de la velocidad angular es 1/seg.

También suele medirse la ω en “revoluciones por minuto”, que se abrevia r.p.m. Por ejemplo, si la velocidad angular del plato de un torno es de 55 r.p.m. Para saber cual es la velocidad angular de ese plato medida en rad/seg o 1/seg., basta saber que una “revolución” equivale a 2 π radianes, y que un minuto equivale a 60 segundos. Entonces ω para este plato será:

$$\omega = 55.\ \frac{2\pi}{60} \quad \left(\text{rad/seg}\right)$$

Comparando las ecuaciones (14) y (15) queda:

$$V = \omega . r \qquad (16)$$

La velocidad “V” se llama “velocidad tangencial” para diferenciarla de la angular “ω”. La ecuación (16) nos dice que si queremos encontrar la velocidad tangencial del punto “P”, por ejemplo, se debemos multiplicar su velocidad angular por el radio “r”, que es la distancia del punto al centro de giro. Se observa que como esta distancia cambia para los diferentes puntos del hilo de nuestro ejemplo, todos ellos tienen diferente velocidad tangencial (aunque poseen la misma velocidad angular).

La velocidad tangencial en un punto dado es un vector y tiene siempre la dirección de la tangente a la trayectoria en ese punto (que es la dirección que seguiría la piedra de nuestro ejemplo si se cortara el hilo en dicho punto). Por ejemplo, en la figura 9, están representados los vectores velocidad tangencial en los puntos “P Y P1”. Se observa que, aún cuando el punto material gira con rapidez constante (recorre arcos iguales en tiempos iguales), la velocidad considerada como vector cambia continuamente, ya que cambia su dirección.

ACELERACIÓN RADIAL

Esta aceleración, llamada también aceleración centrípeta, está originada por el cambio de dirección que experimenta el vector velocidad tangencial de una partícula que describe una trayectoria circular. Consideremos el movimiento circular con rapidez constante representado en la fig. 9.

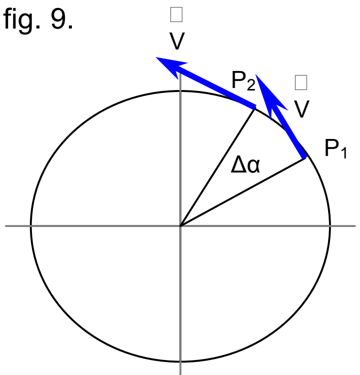

Fig. 10

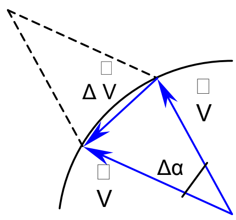

Fig. 11

En la figura 10, están indicados los vectores velocidad tangencial de la partícula que gira, para dos instantes separados un intervalo $\Delta t$. En este tiempo $\Delta t$, la partícula ha girado un ángulo $\Delta\alpha$. Recordando que la aceleración de una partícula se define como el cambio de velocidad (considerada como vector) dividido por el tiempo en que se produjo, trataremos de evaluar ese cambio en este caso que, como ya vimos, se trata de un cambio de dirección, pero no de módulo. En la figura 11, se han representado los dos vectores V, uno a continuación del otro para hacer su diferencia. Completando el paralelogramo, encontramos $\Delta v$ , recordando que la diferencia de dos vectores es un vector representado por la diagonal menor del paralelogramo. Si $\Delta\alpha$ es pequeño, podemos identificar la cuerda por el arco en la fig. 12, y escribir la relación aproximada, entre los módulos de v y $\Delta v$:

$$\Delta v = \Delta\alpha . V \quad (17)$$

Como estos cambios se han realizado en el tiempo $\Delta t$, tiene sentido dividir ambos miembros de (17) por $\Delta t$, quedando:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} . v \qquad (18)$$

El primer término se define como la <u>aceleración radial</u> media de la partícula, y se representa con el símbolo $\overline{ar}$ . En el límite, cuando $\Delta t \longrightarrow 0$, se tiene la aceleración radial instantánea. Como la cantidad $\Delta\alpha / \Delta t$ es la velocidad angular ω de la partícula, la ecuación (18) queda:

$$ar = \omega . V \qquad (19)$$

Teniendo presente que $v = \omega . r$, la ecuación anterior también puede escribirse:

$$ar = \omega^2 . r \quad \square \quad ar = \frac{v^2}{r} \qquad (20)$$

El sentido del vector aceleración radial, es el mismo que el del vector cambio de velocidad el cual vimos que, para ángulos muy pequeños, es perpendicular a la dirección de “v”. Es decir, “ V y ar” son perpendiculares entre sí, de donde se concluye que “ar” tiene dirección del radio (y está dirigido hacia el centro de giro).