

## ACERCA DEL COEFICIENTE DE RESTITUCION

(Artículo publicado en La Revista N° 7- Diciembre de 2003, publicación trimestral del consejo Profesional de Ingeniería Mecánica y Electricista de la ciudad de Buenos Aires. Se reproduce con autorización del editor)

Ing Aníbal O. García – [agarcia@perarg.com.ar](mailto:agarcia@perarg.com.ar)

En un accidente de tránsito, las evidencias recogidas con posterioridad (huellas de neumáticos, restos esparcidos, deformaciones en los vehículos, etc.), permiten determinar con cierta aproximación los movimientos post impacto de los vehículos que colisionaron. El problema que se le plantea al investigador es determinar a partir de estas evidencias, los movimientos –cinemática y dinámica- previos al impacto, como aporte para la posterior determinación de las causas y responsabilidades en la generación del accidente.

Hay diversas relaciones físico-matemáticas entre los fenómenos previos y las evidencias relevadas a posteriori; los principios conservativos, la fricción y la deformación elasto-plástica de las estructuras entre otras. Uno de los más sencillos, y llamativamente más ignorados, es el fenómeno de la restitución.

Es objeto de esta breve reseña, rescatar del olvido esta sencilla herramienta.

### UN BREVE RACCONTO CONCEPTUAL

En cualquier choque de dos cuerpos sólidos, el grado de anelasticidad<sup>(1)</sup> del impacto está representado por el coeficiente de restitución  $e$ . En el caso general de un choque de dos vehículos a velocidades  $v_1$  y  $v_2$ , que se separan a velocidades  $v'_1$  y  $v'_2$  respectivamente, el coeficiente de restitución del choque se expresa mediante la relación:

$$e = -(v'_1 - v'_2)/(v_1 - v_2) \quad [1]$$

En los ensayos de choque de vehículos contra barreras rígidas, como la masa del objeto embestido es muy grande respecto de la masa del móvil embistente (*masa infinita*), y su velocidad previa y posterior al impacto es nula ( $v_2 = v'_2 = 0$ ), la expresión queda reducida a:

$$e = -(v' / v_i) \quad [2]$$

El valor del coeficiente en este caso resulta una característica propia del automóvil ensayado, cualidad que engloba la rigidez media de la zona deformada en la colisión, como producto de las formas y de los materiales constitutivos.

En el instante inicial de la colisión la velocidad es  $v_i$  y al finalizar el impacto la velocidad final es  $v' = -e v_i$ . La variación de velocidad total resulta entonces:

$$\text{delta-V} = v_i (1 + e). \quad [3]$$

Resulta evidente que si el coeficiente de restitución es una característica propia de cada uno de los cuerpos que contactan en la colisión, para el caso de choques entre dos automóviles, el valor del coeficiente de restitución del impacto esté asociado a una combinación de las características de ambos vehículos (masa, rigidez, etc.). Apoyado en esta evidencia intuitiva y operando con las ecuaciones

derivadas de los principios de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía durante el choque, *Richard HOWARD* halló la ecuación que relaciona el coeficiente de restitución específico de un choque, con los valores determinados en el ensayo y las masas de los vehículos involucrados (HOWARD et al, 1993)

$$e_{AB}^2 = 1 + [M_B (e_A^2 - 1) + M_A (e_B^2 - 1)] / [M_B + M_A] \quad [4]$$

Donde  $M$  es la masa y los subíndices  $A$  y  $B$  refieren a cada uno de los vehículos. En uno de los ensayos referidos en el trabajo citado, se expone el caso de dos vehículos, ensayados contra barreras rígidas a velocidades de 2,2 y 2,1 m/s (4,9 y 4,7 m.p.h.). En cada uno de los casos los coeficientes determinados fueron 0,26 y 0,29. En un ensayo de choque entre ellos con variaciones de velocidad total ( $\Delta V$ ) de 2,2 m/s, el valor del coeficiente de la colisión se encontraba entre 0,25 y 0,30. el mismo coeficiente calculado con la ecuación [4] da como resultado  $e_{AB} = 0,274$ .

### ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE RESTITUCION

Cuando se trata de determinar las velocidades previas al impacto, el coeficiente de restitución no puede calcularse con las ecuaciones [1] o [2]. De allí que se ha tornado importante el problema de su determinación por otros medios.

Como se ha mencionado, la restitución es un fenómeno asociado a la respuesta elástica de los materiales durante un choque. Sin embargo, históricamente se ha relacionado el valor del coeficiente de restitución  $e$  con el grado de *severidad* del impacto. Este concepto nunca ha sido definido en forma rigurosa por los autores americanos, que desarrollaron empíricamente el concepto de severidad de la colisión, pero en sus expresiones matemáticas siempre está de alguna manera relacionado con la variación de velocidad del vehículo ( $\Delta V$ ), o más indirectamente con el módulo de la velocidad de impacto  $v_i$ . En este contexto conceptual, *T. SATO* en 1967 propuso la siguiente ecuación empírica:

$$e = 0,574 e^{(-0,1419 v)} \quad [5]$$

donde  $v$  es el módulo de la velocidad de impacto expresado en m/s <sup>(2)</sup>.

El tema del coeficiente de restitución quedó en el olvido durante por lo menos las décadas del 70 y el 80, posiblemente debido al auge que tuvieron los criterios que relacionan deformación residual con velocidad de impacto. Los trabajos de *Kenneth Campbell* en 1972 y de sus continuadores, asumieron hipótesis de valores despreciables de  $e$  en los choques a más de 25 km/h, y dejaron en un segundo plano, la consideración del fenómeno de la restitución en los análisis subsiguientes.

En los últimos años se han realizado nuevos avances en la investigación de la característica anelástica de los automóviles, sobre todo con la introducción de elementos absorbedores de energía cinética en los paragolpes y sus vinculaciones a las estructuras de los automóviles. En la bibliografía publicada por la *Society of Automotive Engineers* (SAE) en el año 2000, se encuentran trabajos que estudian el problema desde dos ángulos. Por un lado la formulación de un modelo dinámico (teórico), de alcance general, y por el otro, la recopilación y sistematización estadística de ensayos de choques contra

barreras rígidas y de automóviles entre sí. A su vez, los criterios basados en ensayos se dividen en choques de baja velocidad, menos de 8,5 m/s (30 km/h) y mayores de 15 m/s (50 km/h). Trataremos de presentar un breve resumen de los autores más importantes, y de los resultados de sus investigaciones

*Denis Wood* analizó el problema desde un modelo teórico de compresión elástica y velocidad de rebote, asimilando la estructura de un automóvil en colisión a un tubo de paredes delgadas, cerca de los límites críticos de pandeo (WOOD,1996).

Asumiendo que se trata de una aproximación simplificada a un problema complejo, *Wood* plantea -y corrobora con datos experimentales-, que la velocidad de rebote  $v'$  crece linealmente para velocidades de impacto entre 0 y 10 km/h, y entre 20 y 40 km/h; tiene un valor constante en el intervalo entre 10 y 20 (aproximadamente 3 km/h), y otra de alrededor de 6,5 km/h, para velocidades de impacto de entre 40 y 60 km/h, para caer abruptamente a órdenes de 3 km/h para velocidades en impacto a más de 60 km/h.

Cotejados con 121 ensayos de choque contra barrera de automóviles fabricados entre los años 1960 y 1990, *Wood* encuentra dispersiones de los valores calculados dentro del 1,5 %. El modelo teórico indica que el coeficiente de restitución decrece con la mayor velocidad de impacto, pero que lo hace *en forma discontinua*. Estas discontinuidades están asociadas con la rigidez diferente que va encontrando el frente de choque a medida que progresa la deformación de la estructura

En los choques a baja velocidad la deformación es muy pequeña y en algunos casos nula, con lo que las discontinuidades en la variación del coeficiente de restitución señaladas por *Wood* pierden significación. En este ámbito del problema, *Howard*, en base a 13 ensayos de choque de cuatro tipos de vehículo contra barrera y entre sí a baja velocidad, a menos de 3,5 m/s (12 km/h), ajustaron el criterio de *SATO* a una expresión exponencial, en la que el exponente es una ecuación de tercer grado (HOWARD et al, 1993). En 1998 *Vincent Antonetti* amplió el universo de la muestra a 53 ensayos con 23 tipos de vehículos diferentes, en velocidades de impacto entre vehículos con y sin amortiguadores de impacto, a velocidades de entre 0,5 y 8,8 m/s (2 y 32 km/h) (ANTONETTI, 1998), proponiendo la ecuación:

$$e = 0,5992 e^{(-0,2508 v + 0,01934 v^2 - 0,001279 v^3)} \quad [6]$$

Para finalizar esta reseña bibliográfica, hay que destacar el trabajo de *Monson y Germane* publicado en 1999 (MONSON et al, 1999). Basados en una recopilación estadística de las zonas de los vehículos más frecuentemente afectadas por colisiones en la vía pública, orientaron la búsqueda de datos en los ensayos de NHTSA y su compilación bajo criterios de restitución. De tal manera determinaron la existencia de dos fases en el fenómeno; el primero entre los 50 y 120 milisegundos posteriores al inicio de la colisión, y la segunda entre 120 y 160 ms, en este caso con mínimos valores de fuerza aplicada. Con esta primera identificación analizaron vehículos con motores al frente dispuesto “en línea” y transversales por separado, en ensayos contra barrera a velocidades de 48 km/h (metodología de la norma FMVSS 208) y de 56 km/h (requerimientos de seguridad NCAP).

Uno de los descubrimientos señalados por *Monson* es que a 56 km/h, el coeficiente de restitución es mayor que a 48 km/h, contradiciendo las conclusiones de los trabajos publicados hasta esa fecha. Los autores demuestran la consistencia de los resultados en todo tipo de vehículos y en un gran número de ensayos, incluso en casos de choques frontales parciales (50 % del ancho), y sugieren, sin avanzar en un estadio detallado, que esta característica responde a que a 56 km/h, la deformación alcanza la región del panel frontal del habitáculo (parallamas), cuyas características elásticas son superiores las del resto de la estructura frontal. Esta mayor elasticidad genera fuerzas de restitución mayores, que determina mayores aceleraciones y velocidades en la fase de rebote del choque.

El trabajo de *Monson* y *Germane* confirma que los coeficientes de choque de vehículos entre sí son siempre menores que en los impactos contra barreras, y que los automóviles modernos, para choques frontales que involucren todo el ancho, tienen coeficientes de restitución más altos que los modelos más antiguos.

Corresponde remarcar que los autores citados limitan su análisis a choques colineales, es decir a aquellos casos en los que las componentes de rotación en los movimientos post impacto son nulos, o al menos lo suficientemente pequeños para ser ignorados en el análisis. El análisis del proceso de choques complejos donde se combinan desplazamientos lineales y de rotación a consecuencia del contacto, plantea la necesidad de considerar coeficientes de restitución normal  $e_n$  y tangencial  $e_t$  y un coeficiente de fricción entre los móviles  $u$ . Un análisis teórico se encuentra en un trabajo de *Hirotoishi Ishikawa*, publicado por SAE en 1994, donde se define un *Coefficiente de Impulso Generalizado GIR* obtenido como el cociente  $P_{to}/P_{no}$ , siendo  $P_{to}$  y  $P_{no}$  los respectivamente impulsos angular y normal, para una condición ideal absolutamente plástica;  $e_n = e_t = 0$  (ISHIKAWA,1994). La consideración de este modelo excede los propósitos de este artículo, y su referencia es sólo a los efectos de orientar al lector interesado en profundizar el tema.

## CONSIDERACIONES FINALES

Si bien no cabe la menor duda que el fenómeno de la restitución post impacto en los automóviles está asociado a las características de respuesta elasto-plástica de la estructura, los ensayos y las determinaciones teóricas convergen a identificar el valor del coeficiente de restitución con la velocidad de impacto. Aspectos como el modelo de los vehículos, sus características de diseño, disposición del motor para el caso frontal, y otros, tienen significación secundaria en la estimación del valor de  $e$ .

La ecuación de *Sato* [5], demuestra satisfacer con muy buena aproximación los casos de automóviles de modelos anteriores a los años '70, para valores de  $e$  inferiores a 0,3 (velocidades de impacto mayores de 20 km/h). Las adaptaciones de diseños de estructuras monocasco a los conceptos de deformación progresiva, generalizados a partir de la década del '80, provocaron cambios sensibles en la respuesta elasto-plástica de los vehículos en el choque. Para impactos de baja velocidad, la curva de *Howard* [6] presenta resultados muy confiables en el entorno de 10 a 30 km/h.

En un trabajo reciente, y en relación con el empleo de modelos dinámicos en el análisis de colisiones, hemos sugerido una corrección de la ecuación [5], que resulta atractiva y de fácil manejo en las estimaciones analíticas, por su simplicidad (GARCIA et al, 2003). La corrección sugerida se expresa de la siguiente manera:

$$e = 0,45 e^{(-0,145 v)} \quad \text{para } v < 15 \text{ m/s} \quad [7-a]$$

$$e = 0,12 e^{(-0,055 v)} \quad \text{para } v > 15 \text{ m/s} \quad [7-b]$$

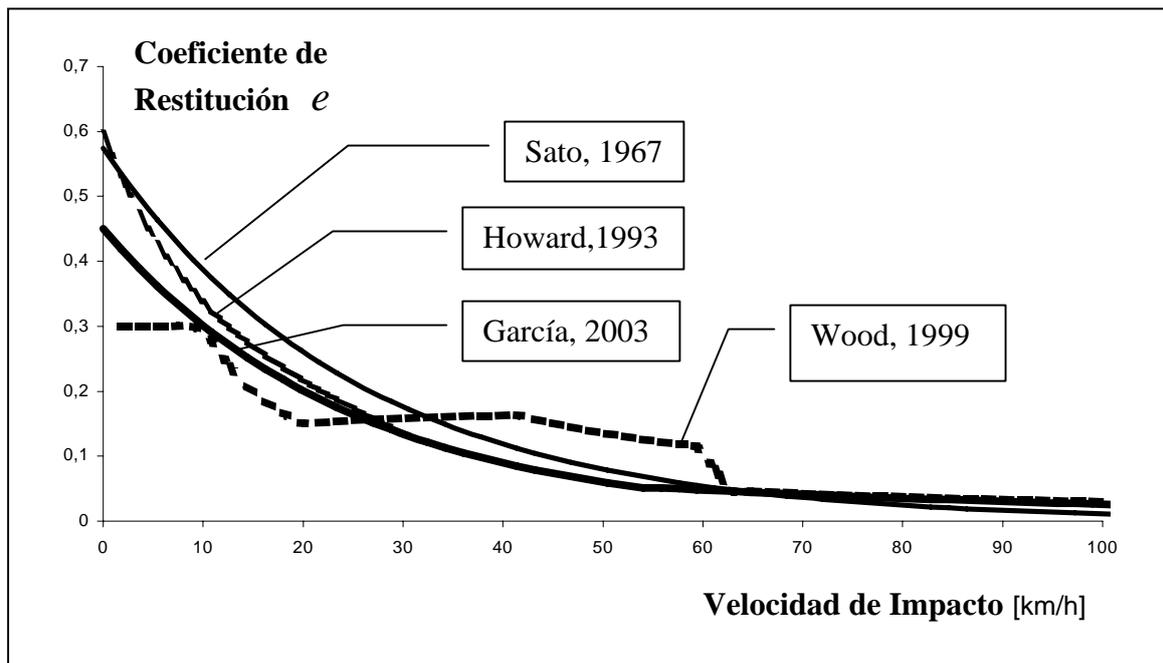


Figura 1 – Coeficiente de Restitución vs Velocidad de impacto. Comparación de las ecuaciones de Sato, Howard, García y el criterio de Wood, en el rango de 0 a 100 km/h

En la figura 1 se grafican las ecuaciones [5], [6] y [7]. En línea punteada se intercala una función derivada del criterio de Wood, que representa el criterio más ajustado al caso, en el actual estado del arte. Su observación permite determinar tres zonas diferenciadas del problema de la restitución. La zona de muy baja velocidad de impacto (menos de 10 km/h) con una gran dispersión de los criterios de estimación, la zona de baja velocidad (entre 10 y 60 km/h) y la zona de alta velocidad, (mayor a 60 km/h).

Buenos Aires, octubre de 2003.

## REFERENCIAS

<sup>(1)</sup> El término *anelasticidad* indica el apartamiento de la condición ideal de *choque elástico* ( $e = 1$ ) o de proximidad al caso opuesto, también ideal, de plasticidad absoluta,  $e = 0$ .

<sup>(2)</sup> En el original la velocidad está expresada en millas por hora (m.p.h), con lo que la expresión resulta

$$e = 0,574 e^{(-0,1634 v)}$$

En el presente artículo se utilizan unidades MKS, y entre paréntesis unidades técnicas más usadas en el lenguaje cotidiano

## FUENTES BIBLIOGRAFICAS

- ANTONETTI, 1998 *Vincent W. ANTONETTI Estimating the Coefficient of Restitution of Vehicle-to-Vehicle Bumper Impacts* – Paper SAE 980552
- SATO, 1967. *T. Sato et al - Dynamic Consideration on Automobile Collision.-* Citado por *Russel A. SMITH and Thomas J. NOGA – Accuracy and Sensivity of CRASH* Paper SAE 821169
- GARCIA et al, 2003 *Aníbal O. García, José P. Cebreiro - Utilización de Modelos Dinámicos en la Investigación de Accidentes Viales” - CONGRESO IBEROAMERICANO DE ACCIDENTOLOGÍA VIAL* - Octubre de 2003
- HOWARD et al, 1993. *Richard P. HOWARD, John BOMAR and Cleve BARE Vehicle Restitution Response in Low Velocity Collisions-* Paper SAE 931842
- ISHIKAWA, 1994. *Hirotooshi ISHIKAWA.- Impact Center and Restitution Coefficients for Accidents.-* Paper SAE 940564.
- MONSON et al, 1999. *Kenneth L. MONSON and Geoff J. GERMANE Determination and Mechanism of Motor Vehicle Structural Restitution from Crash Test Data-* Paper SAE 1999-01-0097.
- WOOD, 1999. *Denis WOOD Consideration of the Elastic Compressive Properties of Cars in Frontal Impact-* Paper SAE 1999-01-0095