

SIMULACIONES NUMÉRICAS EN MODELOS DE COLISIÓN

Lic. Adrián O. Blanco¹ licblanco@latinmail.com

Lic. Gustavo A. Enciso¹ gustavoenciso@lycos.es

<http://usuarios.lycos.es/accidentologia>

RESÚMEN

En las colisiones producidas entre vehículos cuyas diferencias de masas son importantes y se desarrollan en encrucijadas, la determinación de los rangos de valores de velocidad, previas al impacto, se encuentra afectada de una serie de variables que hacen al cálculo muy inestable. Establecer las cotas de error sencillamente reemplazando los valores extremos de los parámetros que varían, no es suficiente para apreciar el rango del desvío. Por otro lado se verifica que la sensibilidad del sistema responde a tres variables principales como lo son la diferencia de las masas, los ángulos post impacto y los valores de coeficiente de fricción. Esta sensibilidad no resulta tan notoria ante el desarrollo de los algoritmos tradicionales de cómputo (aplicación directa del principio de la cantidad de movimiento), y solo puede ser apreciada mediante la utilización de técnicas de Monte Carlo.

Si bien existen otras técnicas para el cómputo de las cotas de error [1], su aplicación se hace muy engorrosa dada la necesidad de encontrar un algoritmo que contenga todas las derivadas parciales de las variables intervinientes, además de las limitaciones ya señaladas por E. N. Martínez [2].

INTRODUCCIÓN

Para la aplicación de la técnica de Monte Carlo, se trabajó sobre un caso real de colisión entre una camioneta y una moto, introduciendo en el cálculo de las respectivas velocidades, la variabilidad que presentan tanto las coordenadas del ángulo post impacto como así también el coeficiente de fricción y las masas respectivas. La Figura 1, muestra las posiciones finales de los rodados según relevamiento realizado por la prevención policial en el lugar de los hechos.

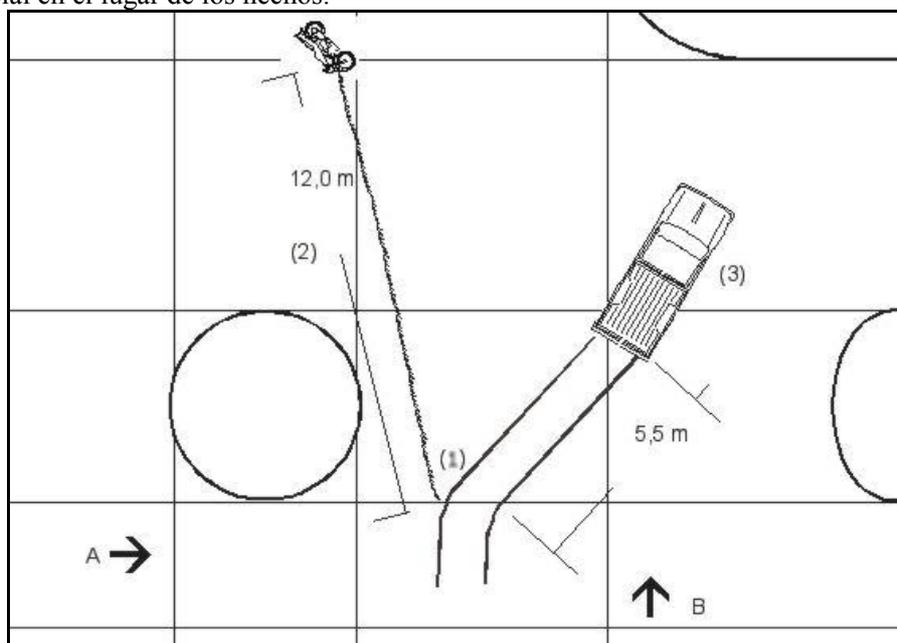


Figura 1: relevamiento de las posiciones finales e indicios de los rodados protagonistas, realizada por la Prevención.

Aunque algunas medidas fueron recolectadas más tarde, del mismo lugar donde ocurrió el accidente, tomando como referencias las juntas de dilatación de las calzadas y las fotografías existentes en el expediente penal, es inevitable verificar una cierta incertidumbre en torno a la ubicación del punto de impacto (1) de ambos rodados. Si bien es cierto que el cambio de dirección de las huellas de frenado de la camioneta señalaría el punto de impacto, en realidad, este indicio tan solo señala donde la camioneta recibe el primer impacto sobre su lateral

¹ Licenciados en Cs. Criminalísticas, Accidentólogos (U.N.N.E.). Colegio de Profesionales en Criminalísticas de la Provincia del Chaco - Argentina.-

izquierdo delantero. Existiendo sobre este mismo lateral del vehículo un segundo impacto reflejo del costado derecho de la motocicleta sobre el costado izquierdo de la camioneta. La Figura 2 y Figura 3, ilustran una imagen montada de la motocicleta sobre la fotografía del expediente penal, ilustrando la correspondencia de los daños del costado referido de la camioneta.



Figura 2 y Figura 3: ilustración de imágenes montadas sobre las fotografías del expediente, confrontando los daños de la camioneta con la formas de impacto de la motocicleta con su frente y su costado (segunda colisión).

La rotura del parabrisas y el descubrimiento de restos de vidrio en la parte interna del rodado de mayor porte, hacen pensar que alguna parte del cuerpo del conductor de la motocicleta impacta sobre el parabrisas, hipótesis reforzada por la ubicación final del sujeto y sus lesiones. El inicio de las efracciones de la motocicleta (1) no coincide exactamente con el punto de cambio de dirección de la huella de frenada de la camioneta; que además señala que este último rodado empezó a detenerse unos centímetros antes del impacto. Todo esto nos conduce a verificar una incertidumbre de las componentes de la proyección post impacto sobre el eje de las abscisas, tanto para la motocicleta como para el rodado de mayor porte.

Por otro lado, el desconocimiento de si las huellas de frenada de la camioneta culminan o no detrás de las ruedas traseras del mismo (3), o si también se produjo el bloqueo de alguna de las ruedas delanteras, nos da argumentos para contemplar una variable de error sobre el eje de la ordenada de la proyección post impacto de la camioneta. Habiendo ya planteado como fuentes de error las proyecciones en el eje de las abscisas para los dos rodados y en el eje de la ordenada para la camioneta; sería prudente también considerar que las efracciones de la motocicleta (2) pueden extenderse unos centímetros mas allá de los 12m (por debajo de su estructura).

Otras dos fuentes de error mas se conforman en el desconocimiento de los valores exactos de peso de los rodados mas sus ocupantes, y los valores de adherencia en el trabajo de roce post impacto de los mismos. Son entonces ocho las fuentes de error que van a ser consideradas en este caso teniendo presente además, la diferencia de masas entre la motocicleta y su acompañante y la camioneta, el cual esta en el orden de los 17/100, en tanto que en el caso ilustrado por E. Martínez, la diferencia de masas estaba en el orden de los 11/25 [2].

METODOLOGÍA

A los fines metodológicos del presente caso, descartamos los 90cm de huellas previas al impacto de la camioneta, para trabajar con mayor rapidez en las ecuaciones de colisiones en el plano y obtener de esta manera una medida central de las velocidades de los rodados al momento del impacto y las dispersiones respectivas.

A pesar de la colisión refleja en el momento del choque y dada la poca diferencia de tiempo entre el primer y segundo impacto, partimos de la consideración que el vector cantidad de movimiento de ambos rodados, previo al primer contacto, coincidían con los ejes coordenados. Al variar las componentes de proyección post impacto en el eje de las x e y , se modifica también los ángulos de proyección y las componentes vectoriales de cantidad de movimiento posteriores a la colisión.

Buscamos entonces las ecuaciones de estimación de velocidades previas al contacto, poniendo las variables de dirección de proyección (ángulos post impacto) en función de las componentes en la ordenada y la

abscisa, evitando trabajar con las funciones trigonométricas. La ecuación a emplear, ya fue propuesta por E. Martínez [2], sobre el cual agregamos a este trabajo un Anexo 1 donde se muestra el arreglo algebraico de cómo arribar a dichas ecuaciones, que se señalan a continuación.

$$V_m = \frac{(2 \cdot g \cdot \mu_m)^2 \cdot x_m}{\left[(x_m)^2 + (y_m)^2 \right]^{\frac{1}{4}}} + \frac{M_c}{M_m} \cdot \frac{(2 \cdot g \cdot \mu_c)^2 \cdot x_c}{\left[(x_c)^2 + (y_c)^2 \right]^{\frac{1}{4}}} \quad \text{Ec. 1}$$

$$V_c = \frac{M_m}{M_c} \cdot \frac{(2 \cdot g \cdot \mu_m)^2 \cdot x_m}{\left[(x_m)^2 + (y_m)^2 \right]^{\frac{1}{4}}} + \frac{(2 \cdot g \cdot \mu_c)^2 \cdot x_c}{\left[(x_c)^2 + (y_c)^2 \right]^{\frac{1}{4}}} \quad \text{Ec. 2}$$

Donde x_c e y_c son las componentes de la proyección de la camioneta en metros luego del contacto; al igual que las variables x_m e y_m lo son para la motocicleta. Las variables μ_m y μ_c , señalan los valores de adherencia *metal-asfalto* y *caucho-asfalto*. Por último las variables M_m y M_c , representan los valores de masas en kilogramos de la motocicleta y la camioneta. Los valores medios de cada variable señaladas arriba, junto con sus desvíos (S_i) considerados², se ilustran en la Tabla 1.

Variables	Valores medios	Desvíos $S(i)$
x_m	-1,9	$\pm 0,1$ m
y_m	11,7	$\pm 0,25$ m
x_c	2,5	$\pm 0,5$ m
y_c	6,5	$\pm 0,5$ m
μ_m	0,5	$\pm 0,1$
μ_c	0,6	$\pm 0,1$
M_m	221	± 5 kg
M_c	1235	± 10 kg

Tabla 1: valores centrales de cada variable a considerar con sus respectivo extremos de variación.

Seguidamente se procede a estimar los valores centrales de velocidad previos al impacto V_c y V_m de los vehículos haciendo variar las masas de los mismos. La orden *rnd(1)* en el paquete de Mathcad® devuelve un número aleatorio entre cero y uno; al igual que la función *ALEATORIO*= en el paquete de Excel®. Los mil (1000) valores de velocidad en unidades de [km/hr] simuladas para cada rodado son ilustrados en las Figuras 4 y 5 seguidamente, haciendo variar simultáneamente el valor de las masas.

Los valores medios son de 59.2 km/hr para la motocicleta con un valor de la triple desviación³ $3S_v = \pm 2.7 \text{ km/hr}$. Para la camioneta el valor medio es de 37.2 km/hr con una valor de $3S_v = \pm 0.3 \text{ km/hr}$. Llama la atención, aún no siendo importantes los errores estimados, la diferencia que existen entre ellos, para un vehículo y para el otro. Notamos que la desviación simple para la camioneta es de $\pm 0.1 \text{ km/hr}$ mientras que para la motocicleta es de $\pm 0.9 \text{ km/hr}$.

² Los desvíos responden al criterio de los autores tomados sobre cada variable, de cuanto es razonable dejar variar.

³ Para los fines forense del presente trabajo se utiliza como medida de variabilidad, el triple valor de la desviación estándar S_v estimada, equivalente a una probabilidad de 99.7%, según recomendaciones de E. Martínez [2].

Encuentros 2004 de Investigación de Accidentes de Tránsito
 Octubre 2004 – Paraná [Argentina]

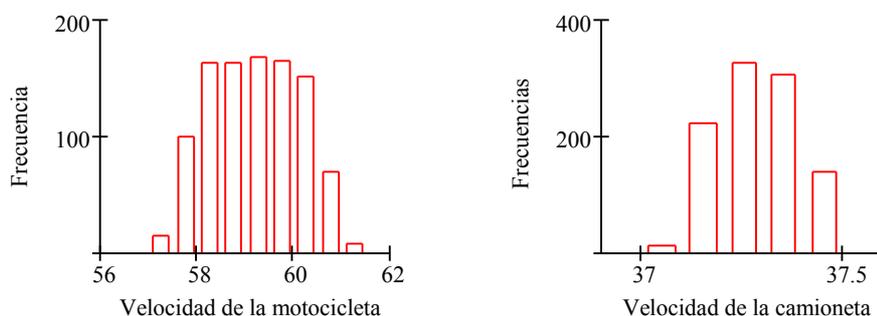


Figura 4 y 5: diagrama de distribución de frecuencias absolutas de velocidad en [km/hr] (motocicleta y camioneta) para mil valores de masas respectivas.

La importante diferencia de las desviaciones no se debe a que los extremos de variación de la masa de la camioneta sean el doble que la variación de masa de la camioneta, según la Tabla 1, pues se verifica que aún siendo iguales estas variaciones la diferencia entre el error para la camioneta será mucho menor que el error para la motocicleta. La razón está en la diferencia de masas que existe entre estas unidades. Tengamos presente que $Mm/Mc = 0.17$ mientras que $Mc/Mm = 5.58$. Aún cuando las masas tomen sus valores extremos, el primer cociente va a estar comprendido entre $0.17 \leq Mm/Mc \leq 0.18$ para la ecuación 2, en tanto que el segundo cociente lo hará entre $5.42 \leq Mc/Mm \leq 5.76$ para la ecuación 1. Cualquier número c que se multiplique mil veces entre valores que van de 0.17 a 0.18 arrojará una variabilidad mucho menor que si se lo multiplica mil veces entre valores de 5.42 a 5.76. Se entiende entonces que si no existiera tanta diferencia entre las masas existiría una equidad en las desviaciones para un rodado y el otro, y el valor de las (Sv) desviaciones computadas arriba, si dependerían mas del rango de variabilidad de las masas y no de las diferencias entre ellas. Esto último es rápidamente comprobable al igualar Mm con Mc .

El segundo procedimiento, se realiza haciendo variar únicamente los valores de adherencia según la Tabla 1. Los mil (1000) valores de velocidad en unidades de [km/hr] simuladas para cada rodado son ilustrados en las Figuras 6 y 7 seguidamente.

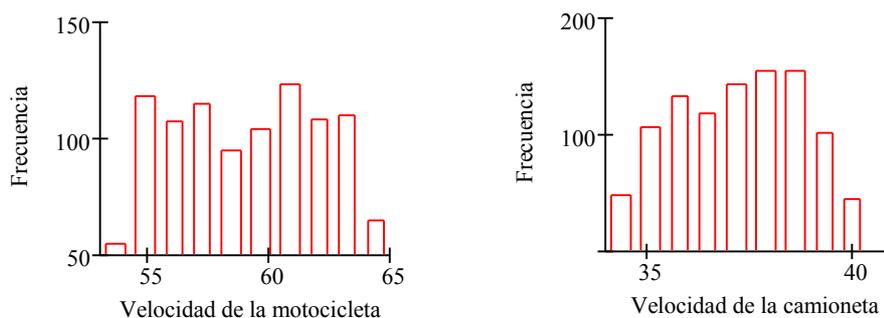


Figura 6 y 7: diagrama de distribución de frecuencias absolutas de velocidad en [km/hr] (motocicleta y camioneta) para mil valores de adherencia respectivas.

Los valores promedios de cada rodado, sus desviaciones simples y el valor total del error (triple valor de la desviación estándar) son señalados seguidamente. Para la motocicleta $Vm = 59.1 \pm 9.5 \text{ km/hr}$ con una desviación estándar de $Sv = \pm 3.1 \text{ km/hr}$. Para la camioneta $Vc = 37.1 \pm 4.5 \text{ km/hr}$ con una desviación $Sv = \pm 1.5 \text{ km/hr}$. Inicialmente notamos que los valores medios se mantienen pero como era de esperarse, las cotas de error aumentaron. Nuevamente llama la atención la diferencia entre las desviaciones finales de velocidad para la motocicleta $Sv = \pm 3.1 \text{ km/hr}$ y el de la camioneta $Sv = \pm 1.5 \text{ km/hr}$. Si bien es cierto que podemos comprender que el error propagado en la proyección post impacto de la camioneta será un poco mayor en comparación con la de la motocicleta, por el coeficiente de adherencia [1], ambas variables se encuentran en las dos ecuaciones 1 y 2, y no podemos explicar, con este argumento, la diferencia entre las desviaciones de ambos cálculos. Pareciera ser que otra vez la respuesta esta en la importancia de la diferencia de masas. Al observar las ecuaciones 1 y 2, vemos que los cocientes de las masas van a afectar a cualquier valor que resulte de la las raíces cuadradas de los

numeradores donde están contenidos los mil valores simulados de adherencia, y este resultado a su vez será afectado por los términos en los denominadores. Pero como ambas ecuaciones tienen los mismos divisores, la explicación está en los numeradores.

Recordemos que, cualquier número $c > 1$ que multiplique a cualquier otro número d , lo hará mayor, mientras que cualquier número $c' < 1$ que multiplique al mismo número d , lo hará menor. Generalizando este axioma matemático diremos que, cualquier número $c > 1$ que multiplique a mil valores comprendidos en un entorno numérico, hará que el rango de dicho entorno sea mayor; mientras que cualquier número $c' < 1$ que multiplique a mil valores del mismo entorno, hará que su rango sea menor. En nuestro caso, a pesar de que x_c , x_m son números menores que y_c , y_m , sucede que M_c/M_m en la ecuación 1, es considerablemente mayor que M_m/M_c . Podemos predecir entonces que, si la razón de las masas de ambos rodados fuera muy próxima a la unidad y los valores de las componentes de proyección post impacto de ambos rodados, sobre los ejes de la abscisa fueran aproximadamente igual a las correspondientes componentes sobre el eje de las ordenadas; entonces las desviaciones estimadas arriba deberían ser iguales. Cuestión esta que puede verificarse haciendo $x_c = y_c$, $x_m = y_m$ y $M_c = M_m$.

Para poder apreciar como se comporta la cota de error respecto a las variables de posición post impacto y ángulo de proyección, hacemos variar los valores de desplazamiento posteriores al impacto, sobre el eje de las ordenadas, de acuerdo a las variaciones indicadas en la Tabla 1. Los mil (1000) valores de velocidad en unidades de [km/hr] simuladas para cada rodado son ilustrados en las Figuras 8 y 9 seguidamente.

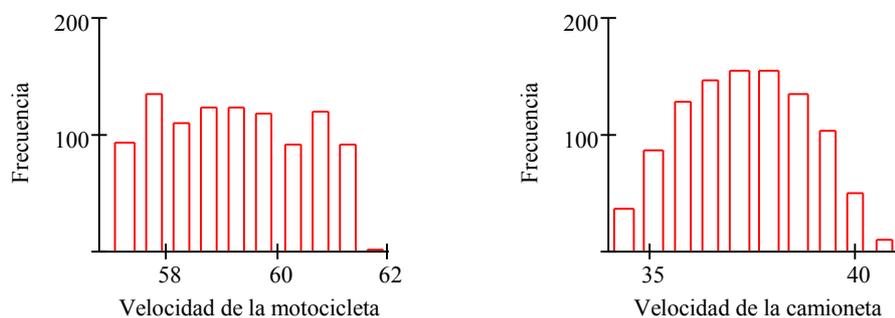


Figura 8 y 9: diagrama de distribución de frecuencias absolutas de velocidad en [km/hr] (motocicleta y camioneta) para mil valores respectivos de valores de las componentes de proyección sobre el eje ordenado.

Los valores promedios de cada rodado, sus desviaciones simples y el valor total del error (triple valor de la desviación estándar) son señalados seguidamente. Para la motocicleta $V_m = 59.2 \pm 3.7 \text{ km/hr}$ con una desviación estándar de $S_v = \pm 1.3 \text{ km/hr}$. Para la camioneta $V_c = 37.2 \pm 4.5 \text{ km/hr}$ con una desviación $S_v = \pm 1.5 \text{ km/hr}$. Al igual que en las dos simulaciones anteriores, una rápida explicación de la proximidad entre las desviaciones, puede resultar de analizar los productos y cocientes de los números que se tratan en la ecuación 1 y 2.

La corrida numérica que contempla la variación de las componentes de proyección sobre el eje de las abscisas, se detalla a continuación en las Figuras 10 y 11.

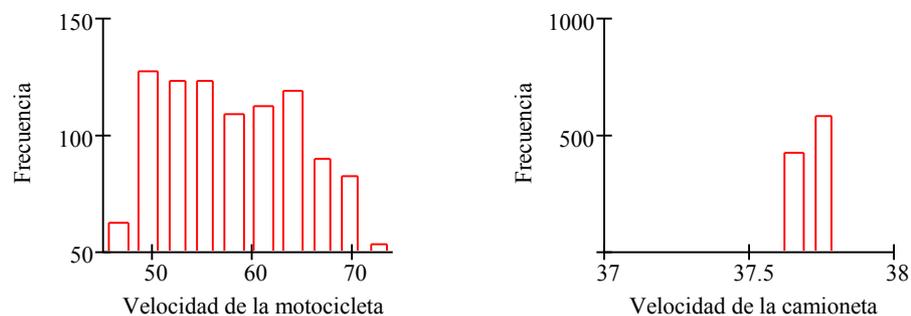


Figura 10 y 11: diagrama de distribución de frecuencias absolutas de velocidad en [km/hr] (motocicleta y camioneta) para mil valores respectivos de valores de las componentes de proyección sobre el eje de las abscisas.

Los valores promedios de cada rodado, sus desviaciones simples y el valor total del error son señalados seguidamente. Para la motocicleta $V_m = 58.7 \pm 22.2 \text{ km/hr}$ con una desviación estándar de $S_v = \pm 7.4 \text{ km/hr}$. Para la camioneta $V_c = 37.7 \pm 0.3 \text{ km/hr}$ con una desviación $S_v = \pm 0.0 \text{ km/hr}$. No solo la diferencia del error entra ambas magnitudes es significativo; sino que además nos encontramos con la fuente de error mas importante, aún mas fuerte que los supuestos errores que iban a producir los valores de adherencias [1], [2].

La función que hace variar la componente x_c de la motocicleta dentro de los parámetros señalados en la Tabla 1 es:

$$1.8 + 0.2 \cdot \text{rnd}(1) \quad \text{Ec. 3}$$

Esta función, cada vez que se la opera, devuelve un valor entre 1.8 y 2.0 que, multiplicada por la unidad en metros y computada tantas veces como queramos (unas mil veces por ejemplo), da como resultado un entorno numérico comprendido entre 1.8m y 2.0m. La amplitud de este entorno (su rango) es de 0.2m y el promedio de los desvíos es muy bajo $S = \pm 0.059 \text{ m}$. Si a este mismo entorno le sumamos cualquier cantidad, por ejemplo la cantidad $\mu \text{ m}^2$, su amplitud y desviación media no cambiará, debido a una propiedad de la varianza. Sin embargo la potencia fraccionaria de 1/2 de este entorno hace que su rango aumente a 1.0m y disminuya su desviación a $S = \pm 0.021 \text{ m}$. La ecuación 3 está ubicada en el numerador y el denominador del primer término de la ecuación 1. Si tenemos presente estos cambios, multiplicado además por el término $(2.g.\mu \text{ m})^{0.5}$ y el factor de 3.6, veremos que el primer término de la ecuación 1 da como resultado un error o desviación promedio bajo de $S_v = \pm 0.18 \text{ km/hr}$, equivalente a un error del 3% respecto a la media de V_c . Sin embargo el mismo análisis sobre el segundo término de la ecuación 1, da como resultado un error de $S = \pm 7.53 \text{ km/hr}$ equivalente a un error del 11.5% respecto a la media de V_c ; debido a que nuestra función que hace variar el término es:

$$(2 + 1 \cdot \text{rnd}(1)) \quad \text{Ec. 4}$$

La amplitud de la función contenida en la ecuación 4 es ahora de 1.0m y su desvío es de $S = \pm 0.29 \text{ m}$, notoriamente mayor a la desviación de la función en la ecuación 3. Si consideramos ahora que toda variación que resulte en el segundo término de la ecuación 1 será multiplicada, además de los términos 3.6 y $(2.g.\mu \text{ c})^{0.5}$, por el cociente M_c/M_m , entendemos porque el error debería aumentarse significativamente.

Nuevamente verificamos que es el cociente M_c/M_m el término responsable de amplificar las desviaciones, comparando el error resultante en el primer término de la ecuación 1 del 3% con el segundo término de la misma ecuación del 11.5%. Un análisis similar en la ecuación 2, demostraría exactamente lo mismo, teniendo presente que ahora el cociente M_m/M_c va a disminuir cualquier desviación promedio que resulte de las funciones de variación de proyección sobre el eje de la ordenada. Luego, como utilizamos para nuestros fines forenses el triple valor de las desviaciones promedios, las diferencias entre los errores estimados para cada vehículo se hacen más significativas.

Como último procedimiento contemplamos todas las fuentes de error señaladas y computamos los valores medios de velocidad para cada vehículo y sus desviaciones promedios correspondientes. Para la motocicleta $V_m = 59.7 \pm 24.7 \text{ km/hr}$ con una desviación estándar de $S_v = \pm 8.2 \text{ km/hr}$. Para la camioneta $V_c = 36.9 \pm 6.2 \text{ km/hr}$ con una desviación $S_v = \pm 2.0 \text{ km/hr}$. Finalmente los mil valores de velocidad en [km/hr] estimados para la variación de las ocho variables contempladas como fuentes de error, se ilustran a continuación en las Figuras 12 y 13.

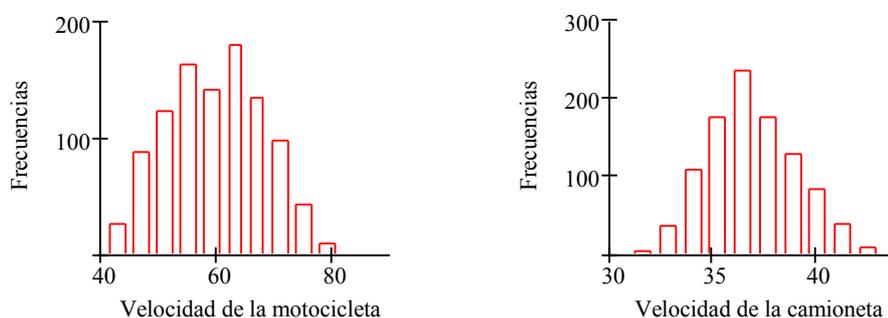


Figura 12 y 13: diagrama de distribución de frecuencias absolutas de velocidad en [km/hr] (motocicleta y camioneta) para mil valores respectivos de las ocho variables consideradas como fuentes de error.

Encuentros 2004 de Investigación de Accidentes de Tránsito
Octubre 2004 - Paraná [Argentina]

La Tabla 2 y 3 muestra en resumen cada una de las Simulaciones realizadas para cada rodado considerando las fuentes de error en forma individual.

	Variando las Masas	Variando las adherencias	Variando la coord en "y"	Variando la coord en "x"	Variando la cor. en "x,y"	Variando todas las variab.
Valor menor	57,0	53,0	57,0	45,0	44,0	41,0
Valor mayor	62,0	65,0	62,0	74,0	76,0	81,0
Rango	5,0	12,0	5,0	29,0	32,0	40,0
Valor medio	59,2	59,1	59,2	58,7	59,1	59,7
Desviación (Sv)	0,9	3,1	1,3	7,4	7,7	8,2
Cv(%)	1,5	5,4	2,1	12,6	13,0	13,8
3.(Sv)	2,7	9,5	3,7	22,2	23,1	24,7
3.Cv(%)	4,6	16,2	6,3	38,0	39,2	41,5
Velocidad	59,2 ± 2,7	59,1 ± 9,5	59,2 ± 3,7	58,7 ± 22,2	59,1 ± 23,1	59,7 ± 24,7

Tabla 2: resumen de las estimaciones de velocidad media y error en [km/r] para cada variable de error, de la motocicleta.

	Variando las Masas	Variando las adherencias	Variando la coord en "y"	Variando la coord en "x"	Variando la cor. en "x,y"	Variando todas las variab.
Valor menor	37,0	34,0	34,0	37,0	33,0	31,0
Valor mayor	38,0	41,0	41,0	38,0	42,0	43,0
Rango	1,0	7,0	7,0	1,0	9,0	12,0
Valor medio	37,2	37,1	37,2	37,7	37,2	36,9
Desviación (Sv)	0,1	1,5	1,5	0,0	1,5	2,0
Cv(%)	0,26	4,0	4,0	0,1	4,0	5,6
3.(Sv)	0,3	4,5	4,5	0,1	4,5	6,2
3.Cv(%)	0,8	12,1	12,0	0,3	11,9	17,0
Velocidad	37,2 ± 0,3	37,1 ± 4,5	37,2 ± 4,5	37,7 ± 0,3	37,2 ± 4,5	36,9 ± 6,2

Tabla 3: resumen de las estimaciones de velocidad media y error en [km/r] para cada variable de error, de la camioneta.

La última columna de las Tablas 1 y 2 muestran los resultados finales estimados para cada vehículo. Verificándose además, para cada vehículo, que la suma de los cuadrados de las desviaciones promedias resultante de cada simulación individual, es aproximadamente igual al cuadrado de la desviación promedio final, resultados típicos de las distribuciones gaussianas. Numéricamente: $(0.9^2 + 3.1^2 + 1.3^2 + 7.4^2)^{0.5} \cong 8.2$ y $(0.1^2 + 1.5^2 + 1.5^2 + 0.0^2)^{0.5} \cong 2.0$

Paralelamente a los cálculos realizados arriba, se computaron los valores de velocidad de cada rodado para cada variable de error, tomando únicamente sus valores extremos señalados en la Tabla 1, como otro método para estimar la amplitud del error. Las cotas de esta manera estimadas se muestran en las Tablas 4 y 5.

	Variando las Masas	Variando las adherencias	Variando la coord en "y"	Variando la coord en "x"	Variando la cor. en "x,y"	Variando todas las variab.
Menor valor de V_m	60,1	54,2	61,5	47,0	48,9	45,5
Mayor valor de V_m	58,2	63,8	57,1	70,8	68,5	67,5
Rango	-1,9	9,6	-4,4	23,8	19,6	22,0
Velocidad de V_m	59,2 ± 0,95	59,1 ± 4,8	59,2 ± 2,2	58,7 ± 11,9	59,1 ± 9,8	59,7 ± 11

Tabla 4: velocidad de la motocicleta en [km/hr] haciendo variar cada fuente de error hacia sus valores extremos.

Encuentros 2004 de Investigación de Accidentes de Tránsito
 Octubre 2004 – Paraná [Argentina]

	Variando las Masas	Variando las adherencias	Variando la coord en "y"	Variando la coord en "x"	Variando la cor. en "x,y"	Variando todas las variab.
Menor valor de V_c	37,1	34,0	35,8	37,7	36,2	35,9
Mayor valor de V_c	37,3	40,3	38,6	37,6	38,2	43,6
Rango	0,2	6,3	2,8	-0,1	2,0	7,7
Velocidad de V_c	37,2 ± 0,1	37,1 ± 3,1	37,2 ± 1,4	37,7 ± 0,05	37,2 ± 1,0	36,9 ± 3,85

Tabla 5: velocidad de la camioneta en [km/hr] haciendo variar cada fuente de error hacia sus valores extremos.

Si comparamos los resultados de las últimas filas de las Tablas 4 y 5, con las velocidades estimadas para cada caso, según las Tablas 2 y 3, podrá apreciarse que las cotas de error inferidas tomando únicamente la combinación de los valores extremos de cada fuente de error, dan como resultados cotas considerablemente menores a las estimadas mediante las simulaciones numéricas. La explicación radica en que existen combinaciones de valores individuales de las variables de error que producen una mayor variabilidad al resultado final, cuestión esta que no se aprecia combinando únicamente los extremos de las fuentes del error.

Por otro lado, si las fuentes de error solo fueran dos, podríamos encontrar una cota similar a la verificada con las simulaciones numéricas si combinamos los valores extremos pero en forma cruzada. Por ejemplo, el resultado de la velocidad de la motocicleta tomando en cuenta las variaciones de las masas, tendrá un valor aproximadamente igual al extremo inferior estimado en las simulaciones, según la Tabla 2, si calculamos V_m primero con la siguiente relación de masas $1225/226$ y luego con el cociente $1245/216$, es decir combinando el menor valor de la masa de la camioneta con el mayor valor de las masas de la motocicleta; de igual forma pero relacionando las cantidades inversas podemos verificar el valor del extremo superior de V_m . Sin embargo este rápido procedimiento solo es posible de realizar cuando contemos con una ecuación donde existen una o dos fuentes de error; caso este que no es el nuestro, pues habría que realizar varias combinaciones posibles entre los extremos de cada fuente de error para encontrar la cota final.

CONCLUSIONES

Las cotas de error encontradas para cada variable (fuentes de error) ponen de manifiesto las fluctuaciones que se pueden dar en los cálculos de velocidades cuando se toman valores que varían de acuerdo a las mediciones y consideraciones que se realizaron. Y en tal sentido las simulaciones numéricas aplicadas a la técnica de Monte Carlo, permiten obtener confiables valores de cotas de error. Luego dichas cotas inferidas no tienen porque ser iguales o similares cuando se las estima para más de un vehículo que participa en el sistema de colisión. Aún cuando el rango de variabilidad en la que se deje fluctuar los valores de cada fuente de error sea distinta o iguales para cada vehículo al cuál se le asigna, no es posible asegurar que existe una relación proporcional sobre la diferencia final entre los errores estimados para cada vehículo. Más bien, esta última diferencia parece depender, no exclusivamente, de las diferencias entre las masas de ambos rodados.

Se a verificado que en este caso, no ha sido la variabilidad de los valores de adherencia la fuente principal del error en la estimación final, por el contrario, para uno de los rodados ha sido la incertidumbre del punto de impacto respecto a la coordenada de la abscisa, la fuente que a contribuido mayor incertidumbre en el resultado final, y la coordenada en la ordenada para el otro vehículo.

Finalmente se descarta como método de la estimación de las cotas de error, el simple reemplazo de los valores extremos de cada fuente de error considerada, en la ecuación a utilizar.

BIBLIOGRAFÍA

- 1] E. N. Martínez.- “Cálculo de Cotas de Error en Accidentología Usando Técnicas de Monte Carlo”.- Ciencia Energética, 25:25; 1994.-
- 2] Enciso G., Custidiano E.- “Propagation of the error in the estimate of the speed of circulation of a vehicle for lost of kinetik energy”. SAE 2002-01-2230.
- 3] Faulin J., Juan A. – “Simulación de Monte Carlo con Excel”. – Proyecto e-Math.

ANEXO 1:

Sistema de ecuaciones paramétricas para la aplicación del principio de conservación de la cantidad de movimiento en el plano "x-y"

$$\begin{aligned} M_m \cdot V_m(x) + M_c \cdot V_c(x) &= M_m \cdot V_m'(x) + M_c \cdot V_c'(x) \\ M_m \cdot V_m(y) + M_c \cdot V_c(y) &= M_m \cdot V_m'(y) + M_c \cdot V_c'(y) \end{aligned} \quad [1]$$

Como $V_c(x) = 0$ y $V_m(y) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} M_m \cdot V_m &= M_m \cdot V_m'(x) + M_c \cdot V_c'(x) \\ M_c \cdot V_c &= M_m \cdot V_m'(y) + M_c \cdot V_c'(y) \end{aligned} \quad [2]$$

Despejando V_m y V_c , entonces:

$$\begin{aligned} V_m &= V_m'(x) + \frac{M_c}{M_m} \cdot V_c'(x) \\ V_c &= \frac{M_m}{M_c} \cdot V_m'(y) + V_c'(y) \end{aligned} \quad [3]$$

Reemplazando $V_c'(x)$, $V_m'(x)$, $V_c'(y)$ y $V_m'(y)$:

$$\begin{aligned} V_m &= V_m' \cdot \cos(\theta) + \frac{M_c}{M_m} \cdot V_c' \cdot \cos(\alpha) \\ V_m &= V_m' \cdot \sin(\theta) + \frac{M_c}{M_m} \cdot V_c' \cdot \sin(\alpha) \end{aligned} \quad [4]$$

Reemplazando V_m' , V_c' y recordando que S_m es la distancia de proyección de la motocicleta y S_c , el de la camioneta:

$$\begin{aligned} V_m &= (2 \cdot g \cdot \mu_m \cdot S_m)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\theta) + \frac{M_c}{M_m} \cdot (2 \cdot g \cdot \mu_c \cdot S_c) \cdot \cos(\alpha) \\ V_c &= \frac{M_m}{M_c} \cdot (2 \cdot g \cdot \mu_m \cdot S_m)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\theta) + (2 \cdot g \cdot \mu_c \cdot S_c) \cdot \sin(\alpha) \end{aligned} \quad [5]$$

Reemplazando las funciones trigonométricas:

$$V_m = \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu_m} \cdot \sqrt{S_m} \cdot \frac{x_m}{S_m} + \frac{M_c}{M_m} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu} \cdot \sqrt{S_c} \cdot \frac{x_c}{S_c} \quad [6]$$

$$V_c = \frac{M_m}{M_c} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu_m} \cdot \sqrt{S_m} \cdot \frac{y_m}{S_m} + \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu} \cdot \sqrt{S_c} \cdot \frac{y_c}{S_c}$$

$$V_m = \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu_m} \cdot \sqrt{\frac{S_m}{S_m^2}} \cdot x_m + \frac{M_c}{M_m} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{S_c}{S_c^2}} \cdot x_c \quad [7]$$

$$V_c = \frac{M_m}{M_c} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu_m} \cdot \sqrt{\frac{S_m}{S_m^2}} \cdot y_m + \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{S_c}{S_c^2}} \cdot y_c$$

Simplificando:

$$V_m = \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu_m} \cdot \sqrt{\frac{1}{S_m}} \cdot x_m + \frac{M_c}{M_m} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{1}{S_c}} \cdot x_c \quad [8]$$

$$V_c = \frac{M_m}{M_c} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu_m} \cdot \sqrt{\frac{1}{S_m}} \cdot y_m + \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{1}{S_c}} \cdot y_c$$

Reemplazando S_c y S_m :

$$V_m = \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu_m} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt{x_m^2 + y_m^2}}} \cdot x_m + \frac{M_c}{M_m} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2}}} \cdot x_c \quad [9]$$

$$V_c = \frac{M_m}{M_c} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu_m} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt{x_m^2 + y_m^2}}} \cdot y_m + \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2}}} \cdot y_c$$

Ordenando finalmente:

$$V_m = \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot \mu_m} \cdot x_m}{\sqrt{x_m^2 + y_m^2}} + \frac{M_c}{M_m} \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot \mu} \cdot x_c}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2}} \quad [10]$$

$$V_c = \frac{M_m}{M_c} \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot \mu_m} \cdot y_m}{\sqrt{x_m^2 + y_m^2}} + \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot \mu} \cdot y_c}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2}}$$

Que son las ecuaciones a utilizar en las simulaciones numéricas.

SIMULACIONES NUMÉRICAS EN MODELOS DE COLISIÓN

Lic. Adrián O. Blanco¹ licblanco@latinmail.com

Lic. Gustavo A. Enciso¹ gustavoenciso@lycos.es

<http://usuarios.lycos.es/accidentologia>

RESUMEN

En las colisiones producidas entre vehículos cuyas diferencias de masas son importantes y se desarrollan en encrucijadas, la determinación de los rangos de valores de velocidad, previas al impacto, se encuentra afectada de una serie de variables que hacen al cálculo muy inestable. Establecer las cotas de error sencillamente reemplazando los valores extremos de los parámetros que varían, no es suficiente para apreciar el rango del desvío. Por otro lado se verifica que la sensibilidad del sistema responde a tres variables principales como lo son la diferencia de las masas, los ángulos post impacto y los valores de coeficiente de fricción. Esta sensibilidad no resulta tan notoria ante el desarrollo de los algoritmos tradicionales de cómputo (aplicación directa del principio de la cantidad de movimiento), y solo puede ser apreciada mediante la utilización de técnicas de Monte Carlo.

Si bien existen otras técnicas para el cómputo de las cotas de error [1], su aplicación se hace muy engorrosa dada la necesidad de encontrar un algoritmo que contenga todas las derivadas parciales de las variables intervinientes, además de las limitaciones ya señaladas por E. N. Martínez [2].

INTRODUCCIÓN

Para la aplicación de la técnica de Monte Carlo, se trabajó sobre un caso real de colisión entre una camioneta y una moto, introduciendo en el cálculo de las respectivas velocidades, la variabilidad que presentan tanto las coordenadas del ángulo post impacto como así también el coeficiente de fricción y las masas respectivas. La Figura 1, muestra las posiciones finales de los rodados según relevamiento realizado por la prevención policial en el lugar de los hechos.

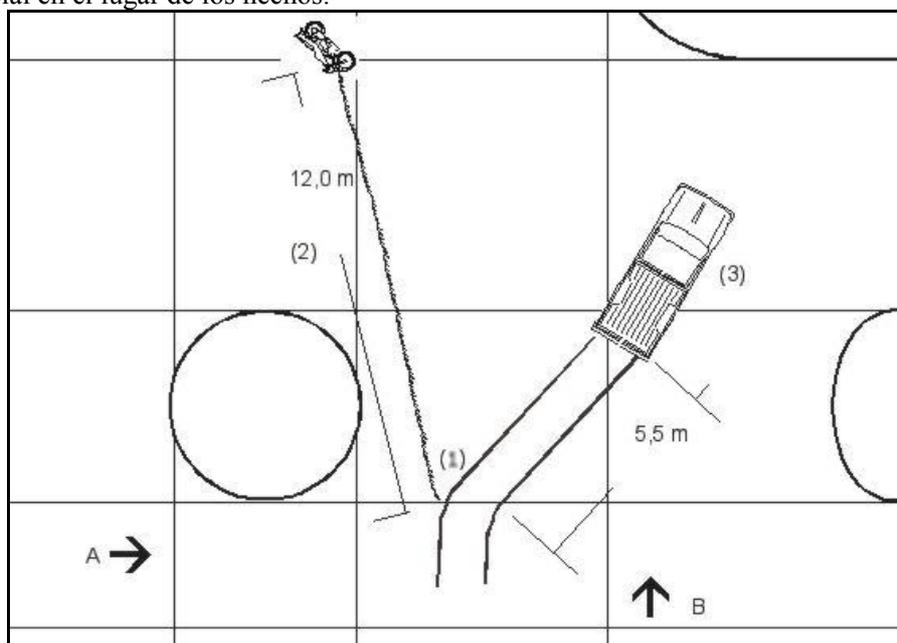


Figura 1: relevamiento de las posiciones finales e indicios de los rodados protagonistas, realizada por la Prevención.

Aunque algunas medidas fueron recolectadas más tarde, del mismo lugar donde ocurrió el accidente, tomando como referencias las juntas de dilatación de las calzadas y las fotografías existentes en el expediente penal, es inevitable verificar una cierta incertidumbre en torno a la ubicación del punto de impacto (1) de ambos rodados. Si bien es cierto que el cambio de dirección de las huellas de frenado de la camioneta señalaría el punto de impacto, en realidad, este indicio tan solo señala donde la camioneta recibe el primer impacto sobre su lateral

¹ Licenciados en Cs. Criminalísticas, Accidentólogos (U.N.N.E.). Colegio de Profesionales en Criminalísticas de la Provincia del Chaco - Argentina.-

izquierdo delantero. Existiendo sobre este mismo lateral del vehículo un segundo impacto reflejo del costado derecho de la motocicleta sobre el costado izquierdo de la camioneta. La Figura 2 y Figura 3, ilustran una imagen montada de la motocicleta sobre la fotografía del expediente penal, ilustrando la correspondencia de los daños del costado referido de la camioneta.



Figura 2 y Figura 3: ilustración de imágenes montadas sobre las fotografías del expediente, confrontando los daños de la camioneta con la formas de impacto de la motocicleta con su frente y su costado (segunda colisión).

La rotura del parabrisas y el descubrimiento de restos de vidrio en la parte interna del rodado de mayor porte, hacen pensar que alguna parte del cuerpo del conductor de la motocicleta impacta sobre el parabrisas, hipótesis reforzada por la ubicación final del sujeto y sus lesiones. El inicio de las efracciones de la motocicleta (1) no coincide exactamente con el punto de cambio de dirección de la huella de frenada de la camioneta; que además señala que este último rodado empezó a detenerse unos centímetros antes del impacto. Todo esto nos conduce a verificar una incertidumbre de las componentes de la proyección post impacto sobre el eje de las abscisas, tanto para la motocicleta como para el rodado de mayor porte.

Por otro lado, el desconocimiento de si las huellas de frenada de la camioneta culminan o no detrás de las ruedas traseras del mismo (3), o si también se produjo el bloqueo de alguna de las ruedas delanteras, nos da argumentos para contemplar una variable de error sobre el eje de la ordenada de la proyección post impacto de la camioneta. Habiendo ya planteado como fuentes de error las proyecciones en el eje de las abscisas para los dos rodados y en el eje de la ordenada para la camioneta; sería prudente también considerar que las efracciones de la motocicleta (2) pueden extenderse unos centímetros mas allá de los 12m (por debajo de su estructura).

Otras dos fuentes de error mas se conforman en el desconocimiento de los valores exactos de peso de los rodados mas sus ocupantes, y los valores de adherencia en el trabajo de roce post impacto de los mismos. Son entonces ocho las fuentes de error que van a ser consideradas en este caso teniendo presente además, la diferencia de masas entre la motocicleta y su acompañante y la camioneta, el cual esta en el orden de los 17/100, en tanto que en el caso ilustrado por E. Martínez, la diferencia de masas estaba en el orden de los 11/25 [2].

METODOLOGÍA

A los fines metodológicos del presente caso, descartamos los 90cm de huellas previas al impacto de la camioneta, para trabajar con mayor rapidez en las ecuaciones de colisiones en el plano y obtener de esta manera una medida central de las velocidades de los rodados al momento del impacto y las dispersiones respectivas.

A pesar de la colisión refleja en el momento del choque y dada la poca diferencia de tiempo entre el primer y segundo impacto, partimos de la consideración que el vector cantidad de movimiento de ambos rodados, previo al primer contacto, coincidían con los ejes coordenados. Al variar las componentes de proyección post impacto en el eje de las x e y , se modifica también los ángulos de proyección y las componentes vectoriales de cantidad de movimiento posteriores a la colisión.

Buscamos entonces las ecuaciones de estimación de velocidades previas al contacto, poniendo las variables de dirección de proyección (ángulos post impacto) en función de las componentes en la ordenada y la

abscisa, evitando trabajar con las funciones trigonométricas. La ecuación a emplear, ya fue propuesta por E. Martínez [2], sobre el cual agregamos a este trabajo un Anexo 1 donde se muestra el arreglo algebraico de cómo arribar a dichas ecuaciones, que se señalan a continuación.

$$V_m = \frac{(2 \cdot g \cdot \mu_m)^2 \cdot x_m}{\left[(x_m)^2 + (y_m)^2 \right]^{\frac{1}{4}}} + \frac{M_c}{M_m} \cdot \frac{(2 \cdot g \cdot \mu_c)^2 \cdot x_c}{\left[(x_c)^2 + (y_c)^2 \right]^{\frac{1}{4}}} \quad \text{Ec. 1}$$

$$V_c = \frac{M_m}{M_c} \cdot \frac{(2 \cdot g \cdot \mu_m)^2 \cdot x_m}{\left[(x_m)^2 + (y_m)^2 \right]^{\frac{1}{4}}} + \frac{(2 \cdot g \cdot \mu_c)^2 \cdot x_c}{\left[(x_c)^2 + (y_c)^2 \right]^{\frac{1}{4}}} \quad \text{Ec. 2}$$

Donde x_c e y_c son las componentes de la proyección de la camioneta en metros luego del contacto; al igual que las variables x_m e y_m lo son para la motocicleta. Las variables μ_m y μ_c , señalan los valores de adherencia *metal-asfalto* y *caucho-asfalto*. Por último las variables M_m y M_c , representan los valores de masas en kilogramos de la motocicleta y la camioneta. Los valores medios de cada variable señaladas arriba, junto con sus desvíos (S_i) considerados², se ilustran en la Tabla 1.

Variables	Valores medios	Desvíos $S(i)$
x_m	-1,9	$\pm 0,1$ m
y_m	11,7	$\pm 0,25$ m
x_c	2,5	$\pm 0,5$ m
y_c	6,5	$\pm 0,5$ m
μ_m	0,5	$\pm 0,1$
μ_c	0,6	$\pm 0,1$
M_m	221	± 5 kg
M_c	1235	± 10 kg

Tabla 1: valores centrales de cada variable a considerar con sus respectivo extremos de variación.

Seguidamente se procede a estimar los valores centrales de velocidad previos al impacto V_c y V_m de los vehículos haciendo variar las masas de los mismos. La orden $\text{rnd}(1)$ en el paquete de Mathcad® devuelve un número aleatorio entre cero y uno; al igual que la función *ALEATORIO*= en el paquete de Excel®. Los mil (1000) valores de velocidad en unidades de [km/hr] simuladas para cada rodado son ilustrados en las Figuras 4 y 5 seguidamente, haciendo variar simultáneamente el valor de las masas.

Los valores medios son de 59.2km/hr para la motocicleta con un valor de la triple desviación³ $3S_v = \pm 2.7\text{km/hr}$. Para la camioneta el valor medio es de 37.2km/hr con una valor de $3S_v = \pm 0.3\text{km/hr}$. Llama la atención, aún no siendo importantes los errores estimados, la diferencia que existen entre ellos, para un vehículo y para el otro. Notamos que la desviación simple para la camioneta es de $\pm 0.1\text{km/hr}$ mientras que para la motocicleta es de $\pm 0.9\text{km/hr}$.

² Los desvíos responden al criterio de los autores tomados sobre cada variable, de cuanto es razonable dejar variar.

³ Para los fines forense del presente trabajo se utiliza como medida de variabilidad, el triple valor de la desviación estándar S_v estimada, equivalente a una probabilidad de 99.7%, según recomendaciones de E. Martínez [2].

Encuentros 2004 de Investigación de Accidentes de Tránsito
 Octubre 2004 – Paraná [Argentina]

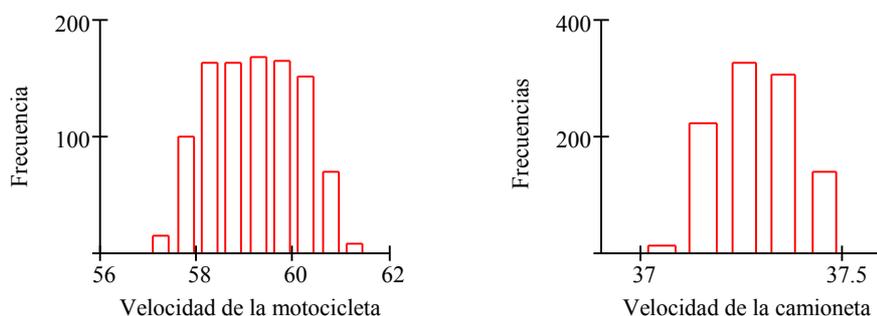


Figura 4 y 5: diagrama de distribución de frecuencias absolutas de velocidad en [km/hr] (motocicleta y camioneta) para mil valores de masas respectivas.

La importante diferencia de las desviaciones no se debe a que los extremos de variación de la masa de la camioneta sean el doble que la variación de masa de la camioneta, según la Tabla 1, pues se verifica que aún siendo iguales estas variaciones la diferencia entre el error para la camioneta será mucho menor que el error para la motocicleta. La razón está en la diferencia de masas que existe entre estas unidades. Tengamos presente que $Mm/Mc = 0.17$ mientras que $Mc/Mm = 5.58$. Aún cuando las masas tomen sus valores extremos, el primer cociente va a estar comprendido entre $0.17 \leq Mm/Mc \leq 0.18$ para la ecuación 2, en tanto que el segundo cociente lo hará entre $5.42 \leq Mc/Mm \leq 5.76$ para la ecuación 1. Cualquier número c que se multiplique mil veces entre valores que van de 0.17 a 0.18 arrojará una variabilidad mucho menor que si se lo multiplica mil veces entre valores de 5.42 a 5.76. Se entiende entonces que si no existiera tanta diferencia entre las masas existiría una equidad en las desviaciones para un rodado y el otro, y el valor de las (Sv) desviaciones computadas arriba, si dependerían mas del rango de variabilidad de las masas y no de las diferencias entre ellas. Esto último es rápidamente comprobable al igualar Mm con Mc .

El segundo procedimiento, se realiza haciendo variar únicamente los valores de adherencia según la Tabla 1. Los mil (1000) valores de velocidad en unidades de [km/hr] simuladas para cada rodado son ilustrados en las Figuras 6 y 7 seguidamente.

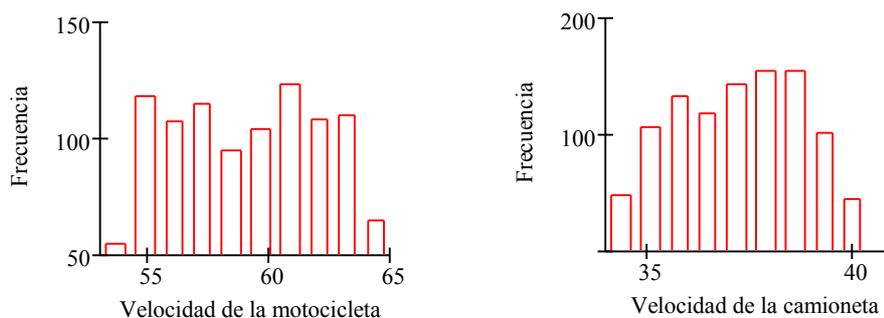


Figura 6 y 7: diagrama de distribución de frecuencias absolutas de velocidad en [km/hr] (motocicleta y camioneta) para mil valores de adherencia respectivas.

Los valores promedios de cada rodado, sus desviaciones simples y el valor total del error (triple valor de la desviación estándar) son señalados seguidamente. Para la motocicleta $Vm = 59.1 \pm 9.5 \text{ km/hr}$ con una desviación estándar de $Sv = \pm 3.1 \text{ km/hr}$. Para la camioneta $Vc = 37.1 \pm 4.5 \text{ km/hr}$ con una desviación $Sv = \pm 1.5 \text{ km/hr}$. Inicialmente notamos que los valores medios se mantienen pero como era de esperarse, las cotas de error aumentaron. Nuevamente llama la atención la diferencia entre las desviaciones finales de velocidad para la motocicleta $Sv = \pm 3.1 \text{ km/hr}$ y el de la camioneta $Sv = \pm 1.5 \text{ km/hr}$. Si bien es cierto que podemos comprender que el error propagado en la proyección post impacto de la camioneta será un poco mayor en comparación con la de la motocicleta, por el coeficiente de adherencia [1], ambas variables se encuentran en las dos ecuaciones 1 y 2, y no podemos explicar, con este argumento, la diferencia entre las desviaciones de ambos cálculos. Pareciera ser que otra vez la respuesta esta en la importancia de la diferencia de masas. Al observar las ecuaciones 1 y 2, vemos que los cocientes de las masas van a afectar a cualquier valor que resulte de la las raíces cuadradas de los

numeradores donde están contenidos los mil valores simulados de adherencia, y este resultado a su vez será afectado por los términos en los denominadores. Pero como ambas ecuaciones tienen los mismos divisores, la explicación está en los numeradores.

Recordemos que, cualquier número $c > 1$ que multiplique a cualquier otro número d , lo hará mayor, mientras que cualquier número $c' < 1$ que multiplique al mismo número d , lo hará menor. Generalizando este axioma matemático diremos que, cualquier número $c > 1$ que multiplique a mil valores comprendidos en un entorno numérico, hará que el rango de dicho entorno sea mayor; mientras que cualquier número $c' < 1$ que multiplique a mil valores del mismo entorno, hará que su rango sea menor. En nuestro caso, a pesar de que x_c , x_m son números menores que y_c , y_m , sucede que M_c/M_m en la ecuación 1, es considerablemente mayor que M_m/M_c . Podemos predecir entonces que, si la razón de las masas de ambos rodados fuera muy próxima a la unidad y los valores de las componentes de proyección post impacto de ambos rodados, sobre los ejes de la abscisa fueran aproximadamente igual a las correspondientes componentes sobre el eje de las ordenadas; entonces las desviaciones estimadas arriba deberían ser iguales. Cuestión esta que puede verificarse haciendo $x_c = y_c$, $x_m = y_m$ y $M_c = M_m$.

Para poder apreciar como se comporta la cota de error respecto a las variables de posición post impacto y ángulo de proyección, hacemos variar los valores de desplazamiento posteriores al impacto, sobre el eje de las ordenadas, de acuerdo a las variaciones indicadas en la Tabla 1. Los mil (1000) valores de velocidad en unidades de [km/hr] simuladas para cada rodado son ilustrados en las Figuras 8 y 9 seguidamente.

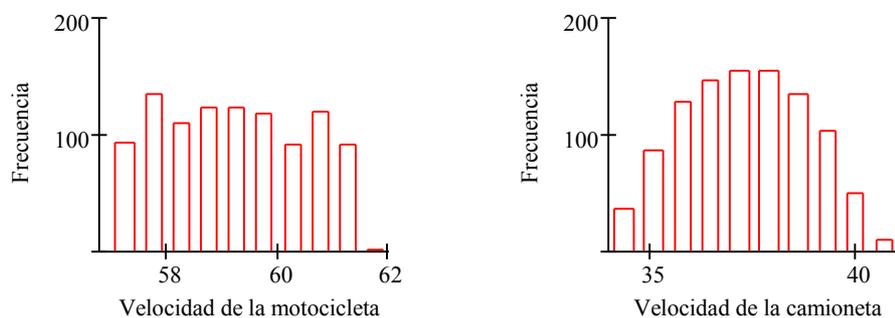


Figura 8 y 9: diagrama de distribución de frecuencias absolutas de velocidad en [km/hr] (motocicleta y camioneta) para mil valores respectivos de valores de las componentes de proyección sobre el eje ordenado.

Los valores promedios de cada rodado, sus desviaciones simples y el valor total del error (triple valor de la desviación estándar) son señalados seguidamente. Para la motocicleta $V_m = 59.2 \pm 3.7 \text{ km/hr}$ con una desviación estándar de $S_v = \pm 1.3 \text{ km/hr}$. Para la camioneta $V_c = 37.2 \pm 4.5 \text{ km/hr}$ con una desviación $S_v = \pm 1.5 \text{ km/hr}$. Al igual que en las dos simulaciones anteriores, una rápida explicación de la proximidad entre las desviaciones, puede resultar de analizar los productos y cocientes de los números que se tratan en la ecuación 1 y 2.

La corrida numérica que contempla la variación de las componentes de proyección sobre el eje de las abscisas, se detalla a continuación en las Figuras 10 y 11.

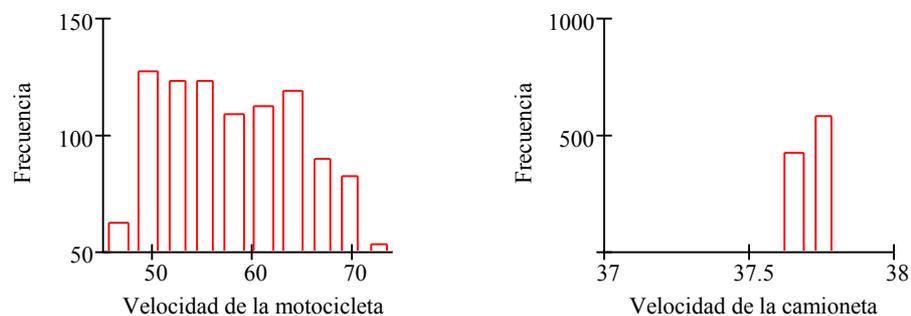


Figura 10 y 11: diagrama de distribución de frecuencias absolutas de velocidad en [km/hr] (motocicleta y camioneta) para mil valores respectivos de valores de las componentes de proyección sobre el eje de las abscisas.

Los valores promedios de cada rodado, sus desviaciones simples y el valor total del error son señalados seguidamente. Para la motocicleta $V_m = 58.7 \pm 22.2 \text{ km/hr}$ con una desviación estándar de $S_v = \pm 7.4 \text{ km/hr}$. Para la camioneta $V_c = 37.7 \pm 0.3 \text{ km/hr}$ con una desviación $S_v = \pm 0.0 \text{ km/hr}$. No solo la diferencia del error entra ambas magnitudes es significativo; sino que además nos encontramos con la fuente de error mas importante, aún mas fuerte que los supuestos errores que iban a producir los valores de adherencias [1], [2].

La función que hace variar la componente x_c de la motocicleta dentro de los parámetros señalados en la Tabla 1 es:

$$1.8 + 0.2 \cdot \text{rnd}(1) \quad \text{Ec. 3}$$

Esta función, cada vez que se la opera, devuelve un valor entre 1.8 y 2.0 que, multiplicada por la unidad en metros y computada tantas veces como queramos (unas mil veces por ejemplo), da como resultado un entorno numérico comprendido entre 1.8m y 2.0m. La amplitud de este entorno (su rango) es de 0.2m y el promedio de los desvíos es muy bajo $S = \pm 0.059 \text{ m}$. Si a este mismo entorno le sumamos cualquier cantidad, por ejemplo la cantidad $\mu \text{ m}^2$, su amplitud y desviación media no cambiará, debido a una propiedad de la varianza. Sin embargo la potencia fraccionaria de 1/2 de este entorno hace que su rango aumente a 1.0m y disminuya su desviación a $S = \pm 0.021 \text{ m}$. La ecuación 3 está ubicada en el numerador y el denominador del primer término de la ecuación 1. Si tenemos presente estos cambios, multiplicado además por el término $(2.g.\mu \text{ m})^{0.5}$ y el factor de 3.6, veremos que el primer término de la ecuación 1 da como resultado un error o desviación promedio bajo de $S_v = \pm 0.18 \text{ km/hr}$, equivalente a un error del 3% respecto a la media de V_c . Sin embargo el mismo análisis sobre el segundo término de la ecuación 1, da como resultado un error de $S = \pm 7.53 \text{ km/hr}$ equivalente a un error del 11.5% respecto a la media de V_c ; debido a que nuestra función que hace variar el término es:

$$(2 + 1 \cdot \text{rnd}(1)) \quad \text{Ec. 4}$$

La amplitud de la función contenida en la ecuación 4 es ahora de 1.0m y su desvío es de $S = \pm 0.29 \text{ m}$, notoriamente mayor a la desviación de la función en la ecuación 3. Si consideramos ahora que toda variación que resulte en el segundo término de la ecuación 1 será multiplicada, además de los términos 3.6 y $(2.g.\mu \text{ c})^{0.5}$, por el cociente M_c/M_m , entendemos porque el error debería aumentarse significativamente.

Nuevamente verificamos que es el cociente M_c/M_m el término responsable de amplificar las desviaciones, comparando el error resultante en el primer término de la ecuación 1 del 3% con el segundo término de la misma ecuación del 11.5%. Un análisis similar en la ecuación 2, demostraría exactamente lo mismo, teniendo presente que ahora el cociente M_m/M_c va a disminuir cualquier desviación promedio que resulte de las funciones de variación de proyección sobre el eje de la ordenada. Luego, como utilizamos para nuestros fines forenses el triple valor de las desviaciones promedios, las diferencias entre los errores estimados para cada vehículo se hacen más significativas.

Como último procedimiento contemplamos todas las fuentes de error señaladas y computamos los valores medios de velocidad para cada vehículo y sus desviaciones promedios correspondientes. Para la motocicleta $V_m = 59.7 \pm 24.7 \text{ km/hr}$ con una desviación estándar de $S_v = \pm 8.2 \text{ km/hr}$. Para la camioneta $V_c = 36.9 \pm 6.2 \text{ km/hr}$ con una desviación $S_v = \pm 2.0 \text{ km/hr}$. Finalmente los mil valores de velocidad en [km/hr] estimados para la variación de las ocho variables contempladas como fuentes de error, se ilustran a continuación en las Figuras 12 y 13.

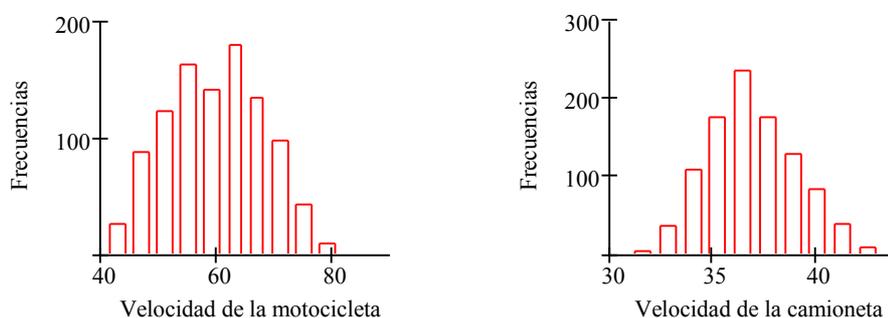


Figura 12 y 13: diagrama de distribución de frecuencias absolutas de velocidad en [km/hr] (motocicleta y camioneta) para mil valores respectivos de las ocho variables consideradas como fuentes de error.

Encuentros 2004 de Investigación de Accidentes de Tránsito
 Octubre 2004 - Paraná [Argentina]

La Tabla 2 y 3 muestra en resumen cada una de las Simulaciones realizadas para cada rodado considerando las fuentes de error en forma individual.

	Variando las Masas	Variando las adherencias	Variando la coord en "y"	Variando la coord en "x"	Variando la cor. en "x,y"	Variando todas las variab.
Valor menor	57,0	53,0	57,0	45,0	44,0	41,0
Valor mayor	62,0	65,0	62,0	74,0	76,0	81,0
Rango	5,0	12,0	5,0	29,0	32,0	40,0
Valor medio	59,2	59,1	59,2	58,7	59,1	59,7
Desviación (Sv)	0,9	3,1	1,3	7,4	7,7	8,2
Cv(%)	1,5	5,4	2,1	12,6	13,0	13,8
3.(Sv)	2,7	9,5	3,7	22,2	23,1	24,7
3.Cv(%)	4,6	16,2	6,3	38,0	39,2	41,5
Velocidad	59,2 ± 2,7	59,1 ± 9,5	59,2 ± 3,7	58,7 ± 22,2	59,1 ± 23,1	59,7 ± 24,7

Tabla 2: resumen de las estimaciones de velocidad media y error en [km/r] para cada variable de error, de la motocicleta.

	Variando las Masas	Variando las adherencias	Variando la coord en "y"	Variando la coord en "x"	Variando la cor. en "x,y"	Variando todas las variab.
Valor menor	37,0	34,0	34,0	37,0	33,0	31,0
Valor mayor	38,0	41,0	41,0	38,0	42,0	43,0
Rango	1,0	7,0	7,0	1,0	9,0	12,0
Valor medio	37,2	37,1	37,2	37,7	37,2	36,9
Desviación (Sv)	0,1	1,5	1,5	0,0	1,5	2,0
Cv(%)	0,26	4,0	4,0	0,1	4,0	5,6
3.(Sv)	0,3	4,5	4,5	0,1	4,5	6,2
3.Cv(%)	0,8	12,1	12,0	0,3	11,9	17,0
Velocidad	37,2 ± 0,3	37,1 ± 4,5	37,2 ± 4,5	37,7 ± 0,3	37,2 ± 4,5	36,9 ± 6,2

Tabla 3: resumen de las estimaciones de velocidad media y error en [km/r] para cada variable de error, de la camioneta.

La última columna de las Tablas 1 y 2 muestran los resultados finales estimados para cada vehículo. Verificándose además, para cada vehículo, que la suma de los cuadrados de las desviaciones promedias resultante de cada simulación individual, es aproximadamente igual al cuadrado de la desviación promedio final, resultados típicos de las distribuciones gaussianas. Numéricamente: $(0.9^2 + 3.1^2 + 1.3^2 + 7.4^2)^{0.5} \cong 8.2$ y $(0.1^2 + 1.5^2 + 1.5^2 + 0.0^2)^{0.5} \cong 2.0$

Paralelamente a los cálculos realizados arriba, se computaron los valores de velocidad de cada rodado para cada variable de error, tomando únicamente sus valores extremos señalados en la Tabla 1, como otro método para estimar la amplitud del error. Las cotas de esta manera estimadas se muestran en las Tablas 4 y 5.

	Variando las Masas	Variando las adherencias	Variando la coord en "y"	Variando la coord en "x"	Variando la cor. en "x,y"	Variando todas las variab.
Menor valor de V_m	60,1	54,2	61,5	47,0	48,9	45,5
Mayor valor de V_m	58,2	63,8	57,1	70,8	68,5	67,5
Rango	-1,9	9,6	-4,4	23,8	19,6	22,0
Velocidad de V_m	59,2 ± 0,95	59,1 ± 4,8	59,2 ± 2,2	58,7 ± 11,9	59,1 ± 9,8	59,7 ± 11

Tabla 4: velocidad de la motocicleta en [km/hr] haciendo variar cada fuente de error hacia sus valores extremos.

Encuentros 2004 de Investigación de Accidentes de Tránsito
 Octubre 2004 – Paraná [Argentina]

	Variando las Masas	Variando las adherencias	Variando la coord en "y"	Variando la coord en "x"	Variando la cor. en "x,y"	Variando todas las variab.
Menor valor de V_c	37,1	34,0	35,8	37,7	36,2	35,9
Mayor valor de V_c	37,3	40,3	38,6	37,6	38,2	43,6
Rango	0,2	6,3	2,8	-0,1	2,0	7,7
Velocidad de V_c	37,2 ± 0,1	37,1 ± 3,1	37,2 ± 1,4	37,7 ± 0,05	37,2 ± 1,0	36,9 ± 3,85

Tabla 5: velocidad de la camioneta en [km/hr] haciendo variar cada fuente de error hacia sus valores extremos.

Si comparamos los resultados de las últimas filas de las Tablas 4 y 5, con las velocidades estimadas para cada caso, según las Tablas 2 y 3, podrá apreciarse que las cotas de error inferidas tomando únicamente la combinación de los valores extremos de cada fuente de error, dan como resultados cotas considerablemente menores a las estimadas mediante las simulaciones numéricas. La explicación radica en que existen combinaciones de valores individuales de las variables de error que producen una mayor variabilidad al resultado final, cuestión esta que no se aprecia combinando únicamente los extremos de las fuentes del error.

Por otro lado, si las fuentes de error solo fueran dos, podríamos encontrar una cota similar a la verificada con las simulaciones numéricas si combinamos los valores extremos pero en forma cruzada. Por ejemplo, el resultado de la velocidad de la motocicleta tomando en cuenta las variaciones de las masas, tendrá un valor aproximadamente igual al extremo inferior estimado en las simulaciones, según la Tabla 2, si calculamos V_m primero con la siguiente relación de masas $1225/226$ y luego con el cociente $1245/216$, es decir combinando el menor valor de la masa de la camioneta con el mayor valor de las masas de la motocicleta; de igual forma pero relacionando las cantidades inversas podemos verificar el valor del extremo superior de V_m . Sin embargo este rápido procedimiento solo es posible de realizar cuando contemos con una ecuación donde existen una o dos fuentes de error; caso este que no es el nuestro, pues habría que realizar varias combinaciones posibles entre los extremos de cada fuente de error para encontrar la cota final.

CONCLUSIONES

Las cotas de error encontradas para cada variable (fuentes de error) ponen de manifiesto las fluctuaciones que se pueden dar en los cálculos de velocidades cuando se toman valores que varían de acuerdo a las mediciones y consideraciones que se realizaron. Y en tal sentido las simulaciones numéricas aplicadas a la técnica de Monte Carlo, permiten obtener confiables valores de cotas de error. Luego dichas cotas inferidas no tienen porque ser iguales o similares cuando se las estima para más de un vehículo que participa en el sistema de colisión. Aún cuando el rango de variabilidad en la que se deje fluctuar los valores de cada fuente de error sea distinta o iguales para cada vehículo al cuál se le asigna, no es posible asegurar que existe una relación proporcional sobre la diferencia final entre los errores estimados para cada vehículo. Más bien, esta última diferencia parece depender, no exclusivamente, de las diferencias entre las masas de ambos rodados.

Se a verificado que en este caso, no ha sido la variabilidad de los valores de adherencia la fuente principal del error en la estimación final, por el contrario, para uno de los rodados ha sido la incertidumbre del punto de impacto respecto a la coordenada de la abscisa, la fuente que a contribuido mayor incertidumbre en el resultado final, y la coordenada en la ordenada para el otro vehículo.

Finalmente se descarta como método de la estimación de las cotas de error, el simple reemplazo de los valores extremos de cada fuente de error considerada, en la ecuación a utilizar.

BIBLIOGRAFÍA

- 1] E. N. Martínez.- “Cálculo de Cotas de Error en Accidentología Usando Técnicas de Monte Carlo”.- Ciencia Energética, 25:25; 1994.-
- 2] Enciso G., Custidiano E.- “Propagation of the error in the estimate of the speed of circulation of a vehicle for lost of kinetik energy”. SAE 2002-01-2230.
- 3] Faulin J., Juan A. – “Simulación de Monte Carlo con Excel”. – Proyecto e-Math.

ANEXO 1:

Sistema de ecuaciones paramétricas para la aplicación del principio de conservación de la cantidad de movimiento en el plano "x-y"

$$\begin{aligned} M_m \cdot V_m(x) + M_c \cdot V_c(x) &= M_m \cdot V_m'(x) + M_c \cdot V_c'(x) \\ M_m \cdot V_m(y) + M_c \cdot V_c(y) &= M_m \cdot V_m'(y) + M_c \cdot V_c'(y) \end{aligned} \quad [1]$$

Como $V_c(x) = 0$ y $V_m(y) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} M_m \cdot V_m &= M_m \cdot V_m'(x) + M_c \cdot V_c'(x) \\ M_c \cdot V_c &= M_m \cdot V_m'(y) + M_c \cdot V_c'(y) \end{aligned} \quad [2]$$

Despejando V_m y V_c , entonces:

$$\begin{aligned} V_m &= V_m'(x) + \frac{M_c}{M_m} \cdot V_c'(x) \\ V_c &= \frac{M_m}{M_c} \cdot V_m'(y) + V_c'(y) \end{aligned} \quad [3]$$

Reemplazando $V_c'(x)$, $V_m'(x)$, $V_c'(y)$ y $V_m'(y)$:

$$\begin{aligned} V_m &= V_m' \cdot \cos(\theta) + \frac{M_c}{M_m} \cdot V_c' \cdot \cos(\alpha) \\ V_m &= V_m' \cdot \sin(\theta) + \frac{M_c}{M_m} \cdot V_c' \cdot \sin(\alpha) \end{aligned} \quad [4]$$

Reemplazando V_m' , V_c' y recordando que S_m es la distancia de proyección de la motocicleta y S_c , el de la camioneta:

$$\begin{aligned} V_m &= (2 \cdot g \cdot \mu_m \cdot S_m)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\theta) + \frac{M_c}{M_m} \cdot (2 \cdot g \cdot \mu_c \cdot S_c) \cdot \cos(\alpha) \\ V_c &= \frac{M_m}{M_c} \cdot (2 \cdot g \cdot \mu_m \cdot S_m)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\theta) + (2 \cdot g \cdot \mu_c \cdot S_c) \cdot \sin(\alpha) \end{aligned} \quad [5]$$

Reemplazando las funciones trigonométricas:

$$V_m = \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu_m} \cdot \sqrt{S_m} \cdot \frac{x_m}{S_m} + \frac{M_c}{M_m} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu_c} \cdot \sqrt{S_c} \cdot \frac{x_c}{S_c} \quad [6]$$

$$V_c = \frac{M_m}{M_c} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu_m} \cdot \sqrt{S_m} \cdot \frac{y_m}{S_m} + \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu_c} \cdot \sqrt{S_c} \cdot \frac{y_c}{S_c}$$

$$V_m = \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu_m} \cdot \sqrt{\frac{S_m}{S_m^2}} \cdot x_m + \frac{M_c}{M_m} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu_c} \cdot \sqrt{\frac{S_c}{S_c^2}} \cdot x_c \quad [7]$$

$$V_c = \frac{M_m}{M_c} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu_m} \cdot \sqrt{\frac{S_m}{S_m^2}} \cdot y_m + \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu_c} \cdot \sqrt{\frac{S_c}{S_c^2}} \cdot y_c$$

Simplificando:

$$V_m = \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu_m} \cdot \sqrt{\frac{1}{S_m}} \cdot x_m + \frac{M_c}{M_m} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{1}{S_c}} \cdot x_c \quad [8]$$

$$V_c = \frac{M_m}{M_c} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu_m} \cdot \sqrt{\frac{1}{S_m}} \cdot y_m + \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{1}{S_c}} \cdot y_c$$

Reemplazando S_c y S_m :

$$V_m = \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu_m} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt{x_m^2 + y_m^2}}} \cdot x_m + \frac{M_c}{M_m} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2}}} \cdot x_c \quad [9]$$

$$V_c = \frac{M_m}{M_c} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu_m} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt{x_m^2 + y_m^2}}} \cdot y_m + \sqrt{2 \cdot g \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2}}} \cdot y_c$$

Ordenando finalmente:

$$V_m = \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot \mu_m} \cdot x_m}{\sqrt{x_m^2 + y_m^2}} + \frac{M_c}{M_m} \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot \mu} \cdot x_c}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2}} \quad [10]$$

$$V_c = \frac{M_m}{M_c} \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot \mu_m} \cdot y_m}{\sqrt{x_m^2 + y_m^2}} + \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot \mu} \cdot y_c}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2}}$$

Que son las ecuaciones a utilizar en las simulaciones numéricas.